Coordenadas no Plano

com as soluções dos exercícios

Elon Lages Lima

com a colaboração de
Paulo Cezar

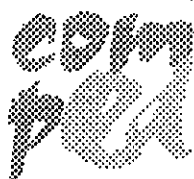
Coordenadas no Plano
Com as soluções dos exercícios

Geometria Analítica, Vetores e Transformações Geométricas

Quarta edição

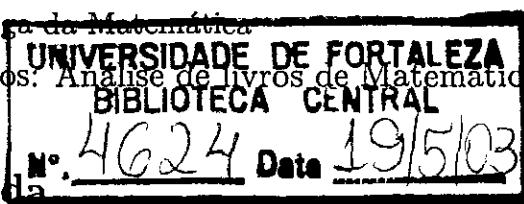
Esta publicação contou com o apoio do
Comitê dos Produtores de Informação Educacional (COMPED)
e teve sua reprodução contratada pelo
Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP),
no âmbito do programa
Publicações de Apoio à Formação Inicial e Continuada de Professores

Elon Lages Lima

Com a colaboração de
Paulo Cezar P. Carvalho

Capa: Rodolfo Capeto

TÍTULOS PUBLICADOS PELA SBM:

Coleção Professor de Matemática

E.L. Lima – Logaritmos
A.C. Morgado, J.B. Pitombeira, P.C. Carvalho e P. Fernandez – Análise Combinatória e Probabilidade
E.L. Lima – Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)
E.L. Lima – Meu Professor de Matemática e Outras Histórias
E.L. Lima com a colaboração de P.C. Carvalho – Coordenadas no Plano com as Soluções dos Exercícios
M.P. do Carmo, A.C. de O. Morgado, E. Wagner, Notas de J.B. Pitombeira – Trigonometria, Números Complexos
E.L. Lima - Coordenadas no Espaço
A.C. Morgado, E. Wagner e S.C. Zani – Progressões e Matemática Financeira
E. Wagner com colaboração de J.P. Q. Carneiro – Construções Geométricas
P.C.P. Carvalho – Introdução à Geometria Espacial
J.L.M. Barbosa – Geometria Euclidiana Plana
E.L. Lima – Isometrias
E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner e A.C. de O. Morgado – A Matemática do Ensino Médio Vol. 1
E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner e A.C. de O. Morgado – A Matemática do Ensino Médio Vol. 2
E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner e A.C. de O. Morgado – A Matemática do Ensino Médio Vol. 3
E.L. Lima – Matemática e Ensino
E.L. Lima, P.C. Carvalho, E. Wagner, e A.C. Morgado – Temas e Problemas
A. Aaboe – Episódios da História Antiga da Matemática
Editor: E.L. Lima – Exame de Textos: Análise de livros de Matemática

Coleção Matemática Aplicada

H. Bolfarine e M. Sandoval – Introdução à Inferência Estatística

Coleção Inciciação Científica

D.G Figueiredo – Números Irracionais e Transcendentes

Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina 110, sl 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro - RJ
Tel.: (21) 2529-5076/5073 – Fax: 2259-4143
e-mail: sbm@sbm.org.br www.sbm.org.br

ISBN: 85-85818-04-2

Prefácio

Como indica o próprio título, o presente livro é uma introdução ao estudo da Geometria por meio de emprego sistemático de coordenadas. Este método, desenvolvido por Pierre Fermat e René Descartes no século 17, estabelece uma equivalência entre enunciados geométricos e proposições relativas a equações ou desigualdades numéricas. Supondo conhecidos os fatos mais simples e básicos da Geometria Plana, mostraremos como interpretar esses fatos algebricamente, sob a forma de relações entre coordenadas de pontos no plano.

Na Primeira Parte do livro, essas relações estão estabelecidas de forma direta e elementar, sem recurso a conceitos adicionais. Na Segunda Parte, é introduzida a noção de vetor, mediante a qual a Álgebra, além de instrumento auxiliar da Geometria, passa a fazer parte dela, podendo-se agora efetuar operações com entidades geométricas. São desenvolvidas as idéias e técnicas básicas do Cálculo Vetorial, com algumas aplicações à Geometria. Na Terceira Parte, as coordenadas e os vetores são utilizados para um tratamento elementar e eficiente da teoria das transformações geométricas, tópico da mais alta relevância no estudo moderno da Geometria.

Nesta nova edição incluímos as soluções dos problemas propostos por considerar que a leitura de soluções rigorosamente redigidas é importante para a formação dos professores. Esta parte compunha o livro "Problemas e Soluções" editado em 1992 com apoio da Fundação Vitae.

Não é demais insistir que, antes de olhar a solução, o leitor deve fazer uma séria tentativa de chegar a ela independentemente. Se conseguir, compare sua solução com aquela apresentada aqui; quase sempre há vários caminhos para o mesmo lugar. Mas, ainda que não tenha o êxito desejado, o esforço feito traz vários resultados benéficos: serve para repensar e fixar alguns conceitos, para isolar as dificuldades, pode

servir para obter respostas (ou vitórias) parciais e certamente ajuda a entender melhor a solução do livro.

Não há figuras nos enunciados dos exercícios, pois desenhá-los faz parte do trabalho requerido. Algumas dessas figuras aparecem aqui junto com as soluções. Outras não, mas isto não quer dizer que não sejam necessárias. Continua sendo encargo do leitor fazer as figuras referentes aos exercícios, executando-se apenas aqueles que têm caráter estritamente algébrico.

Mais uma vez, registro aqui agradecimento especial a meu colega Paulo Cezar P. Carvalho por sua valiosa colaboração.

Rio de Janeiro, 4 de outubro de 2002

ELON LAGES LIMA

Conteúdo

Terceira Parte: Transformações Geométricas 135

Quarta Parte: Soluções dos Problemas 217

Primeira Parte

Geometria Analítica

1. Introdução

A Geometria Analítica baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números reais e os pontos do espaço por ternos ordenados de números reais.

Dentro dessa concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meio de equações. Isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas.

A interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações.

No que se segue, apresentaremos as noções básicas de Geometria Analítica, enfatizando seus aspectos mais relevantes para um estudo introdutório.

Admitiremos conhecidos os fatos mais elementares da Geometria como, por exemplo, que por dois pontos dados passa uma, e somente uma reta; que por um ponto dado fora de uma reta passam uma única paralela e uma única perpendicular a essa reta, etc.

Em particular, suporemos fixada, de uma vez por todas, uma unidade de comprimento (e portanto uma unidade de área), com a qual mediremos a distância $\mathrm{d}(A, B)$ entre os pontos A e B.

2. Coordenadas na reta

Uma reta diz-se *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto B está *à direita* do ponto A (portanto que o ponto A está *à esquerda* de B) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

Um *eixo* é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado a *origem*.

Todo eixo E pode ser posto, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. À origem O do eixo faz-se corresponder o número zero. A cada ponto X de E à direita de O corresponde um número real positivo x, a saber, a distância $d(O,X)$ de X à origem O. Aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem.

Assim, ao ponto X em E corresponde o número real x tal que $x = d(O,X)$ se X está à direita de O e $x = -d(O,X)$ se X está à esquerda de O.

Se ao ponto X do eixo E corresponde, da maneira acima indicada, o número real x, diz-se que x é a *coordenada* do ponto X.

E – + O

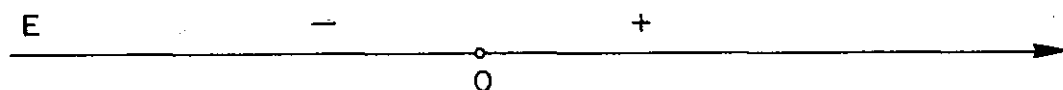



Fig. 2.1 - A seta indica o sentido de percurso sobre o eixo E, cuja origem é o ponto O. Os pontos à direita de O têm coordenadas positivas; os outros, negativas.

Dados os pontos X e Y sobre o eixo E, se suas coordenadas são x e y respectivamente então a distância do ponto X ao ponto Y é

$$d(X,Y) = |x - y| = |y - x|,$$

isto é, tem-se $d(X,Y) = x - y$ se $x \geq y$ e $d(X,Y) = y - x$ se $x \leq y$.

Para provar esta afirmação, lembraremos que a distância entre os pontos A e B é um número $d(A,B) \geq 0$, que $d(A,B) = d(B,A)$ e

que se A, B e C são pontos sobre a mesma reta e B está entre A e C então

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

Se $X = Y$, então não há o que provar. Suponhamos, inicialmente, que X esteja à esquerda de Y, ou seja, que $x < y$. Há 3 casos a considerar:

1) X e Y estão à direita da origem, isto é, $0 < x < y$;
2) X e Y estão à esquerda da origem, ou seja, $x < y < 0$;
3) X e Y estão em lados opostos da origem, logo $x < 0 < y$.

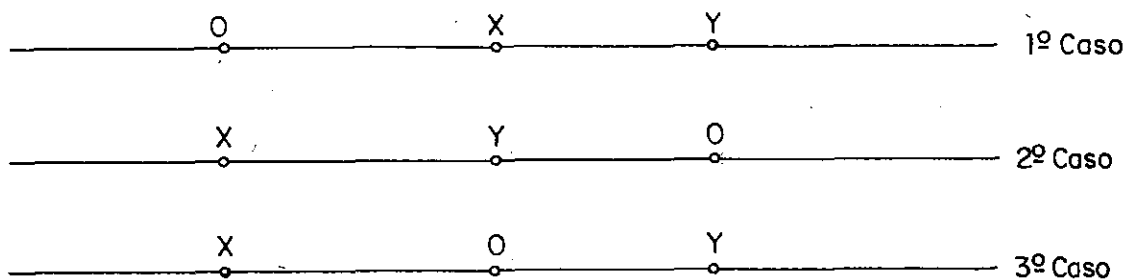



Fig. 2.2 - Provando que $d(X,Y) = |x - y|$.

No primeiro caso, X está entre O e Y. Além disso, tem-se $d(O,X) = x$ e $d(O,Y) = y$. Segue-se que

$$d(O,X) + d(X,Y) = d(O,Y),$$

donde

$$d(X,Y) = d(O,Y) - d(O,X) = y - x = |y - x|.$$

No segundo caso, Y está entre X e O, sendo agora $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$. Então

$$d(O,Y) + d(Y,X) = d(O,X)$$

logo

$$\begin{aligned} d(X,Y) = d(Y,X) &= d(O,X) - d(O,Y) \\ &= -x + y = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

No terceiro caso, O está entre x e y, com $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = y$. Então

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = -x + y = |y - x|.$$

Se X estiver à direita de Y a demonstração se faz de modo análogo.

Exemplo 1. Sejam A, X e Y pontos de coordenadas a, x e y respectivamente, no eixo E. Diz-se que Y é o *simétrico* de X relativamente a A quando A é o ponto médio do segmento cujas extremidades são X e Y. Ou se tem $x < a < y$ com $a - x = y - a$, ou $y < a < x$ com $a - y = x - a$. Em qualquer caso, conclui-se que $y = 2a - x$. A função $s: E \to E$, que associa a cada ponto X do eixo E o seu simétrico Y em relação a A, chama-se a *simetria* (ou *reflexão*) em torno do ponto A. Se X' é outro ponto de E com coordenada x' tem-se

$$\mathrm{d}(s(X), s(X')) = |2a - x - (2a - x')| = |x' - x| = \mathrm{d}(X, X')$$

A igualdade $\mathrm{d}(s(X), s(X')) = \mathrm{d}(X, X')$, válida para quaisquer pontos X, X' se exprime dizendo que a função $s: E \to E$ *preserva* as distâncias, ou é uma isometria de E.

Exemplo 2. Outro tipo de isometria de um eixo E são as translações. Uma *translação* $t: E \to E$ é determinada por um número a. A cada ponto X de coordenada x em E, t faz corresponder o ponto $t(X)$, de coordenada $x + a$. Se X' é outro ponto de E, de coordenada x', temos

$$\mathrm{d}(t(X), t(X')) = |x + a - (x' + a)| = |x - x'| = \mathrm{d}(X, X').$$

Portanto t preserva distâncias. Um caso particular de translação é a função identidade $t(X) = X$, que corresponde a tomar $a = 0$ na definição acima.

Uma simetria s e uma translação t do eixo E são ambas isometrias mas há duas diferenças cruciais entre elas: a primeira é que s inverte enquanto t preserva orientação. Se X está à esquerda de X' então $s(X)$ está à direita de $s(X')$ enquanto $t(X)$ está à esquerda de $t(X')$. A segunda diferença é que s possui um único ponto fixo: $s(X) = X$ se, e somente se $X = A$. Por outro lado, uma translação t não possui pontos fixos (isto é, tem-se $t(X) \neq X$) exceto quando é a função identidade, e neste caso todos os pontos de E são fixos.

3. Coordenadas no Plano

Indica-se com $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

Dados (x, y) e (x', y') em $\mathbb{R}^2$, tem-se $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. O número x chama-se a *primeira coordenada* e o número y a *segunda coordenada* do par (x, y). Observe, por exemplo, que os pares ordenados $(2, 3)$ e $(3, 2)$ são diferentes pois a primeira coordenada de $(2, 3)$ é 2 enquanto que a primeira coordenada de $(3, 2)$ é 3. Por outro lado, os conjuntos $\{2, 3\}$ e $\{3, 2\}$ são iguais pois um objeto pertence a um deles se, e somente se, pertence ao outro. Portanto, um par ordenado não é a mesma coisa que um conjunto com 2 elementos. No par ordenado (x, y) pode-se ter $x = y$ mas se $\{x, y\}$ é um conjunto com 2 elementos tem-se necessariamente $x \neq y$.

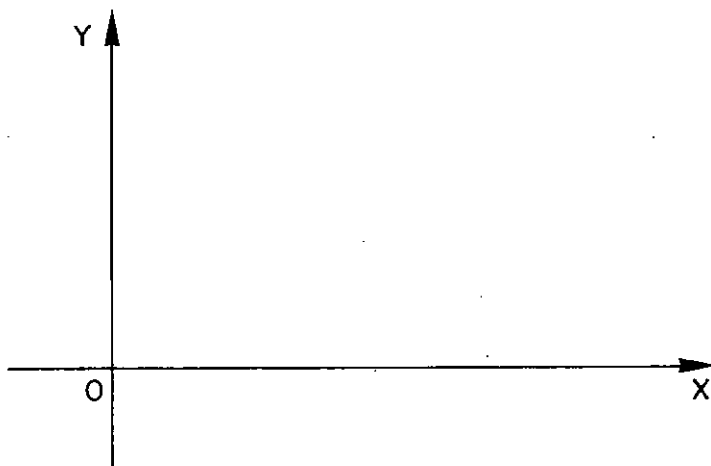



Fig. 3.1 - Sistema de eixos ortogonais

Um *sistema de eixos ortogonais* num plano Π é um par de eixos OX e OY, tomados em Π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O. Diz-se que o eixo OX é *horizontal* e o eixo OY é *vertical*.

Um plano Π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$. Dado o ponto P do plano, baixamos por ele paralelas aos eixos OY e OX. Essas paralelas cortam os eixos em pontos cujas coordenadas são x e y res-

pectivamente. Ao ponto P do plano Π faz-se então corresponder o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde o ponto $P \in \Pi$, interseção da paralela a OY traçada pelo ponto de coordenada x com a paralela a OX traçada a partir do ponto de OY cuja coordenada é y. Os números x e y chamam-se as *coordenadas* (cartesianas) do ponto P relativamente ao sistema de eixo ortogonais fixado: x é a *abcissa* e y a *ordenada* de P.

No que se segue, a menos que seja feita explicitamente uma menção em contrário, admitiremos que foi fixado um sistema de eixos ortogonais no plano, que assim se identifica a $\mathbb{R}^2$. Cada ponto $P = (x, y)$ do plano passa a ser a mesma coisa que um par ordenado de números reais.

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. Tem-se o primeiro quadrante, formado pelos pontos que têm ambas coordenadas positivas. No segundo quadrante, a abcissa é negativa e a ordenada é positiva. No terceiro, abcissa e ordenada são ambas negativas. No quarto quadrante, os pontos têm abcissa positiva e ordenada negativa.

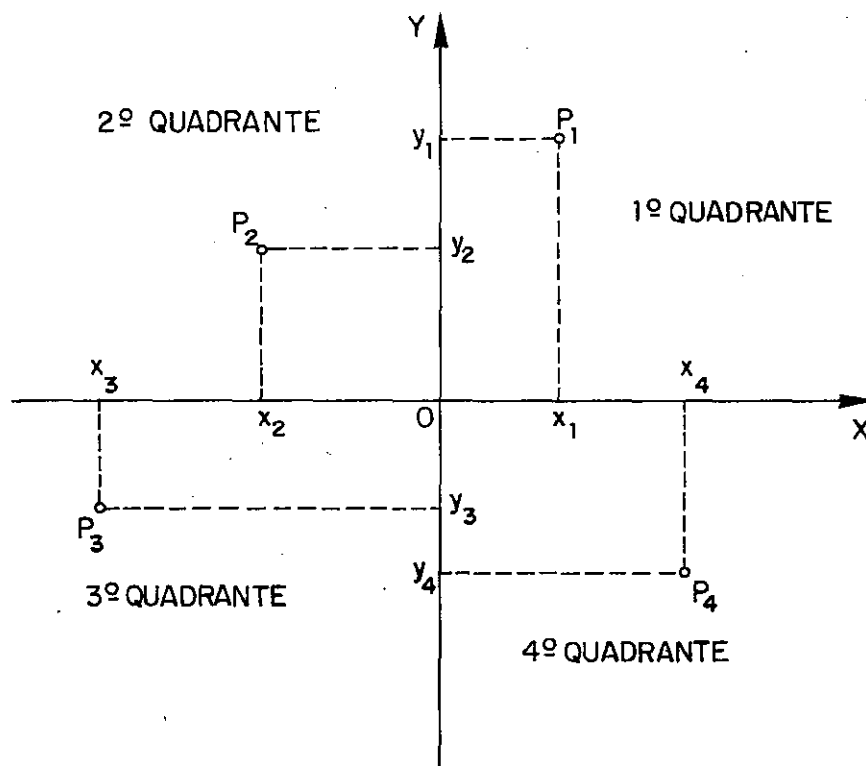



Fig. 3.2 - Coordenadas cartesianas e quadrantes no plano.

Evidentemente, os pontos do eixo OX das abcissas têm coordenadas

$(x,0)$ e no eixo das ordenadas OY os pontos são da forma $(0,y)$. O ponto O, origem dos eixos, tem coordenadas $(0,0)$.

Embora utilizemos neste livro exclusivamente sistemas de eixos ortogonais, isto não é uma necessidade absoluta da Geometria Analítica.

Dados dois eixos concorrentes quaisquer, o processo acima descrito permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Na maior parte dos casos não há motivos para se optar por um sistema de eixos não-ortogonais mas há algumas situações em que isto pode ser vantajoso. É possível desenvolver a Geometria Analítica usando eixos que formam ângulos diferentes de 90°. Tal modificação afeta todas as propriedades ligadas ao conceito de distância. Outras propriedades (por exemplo, as relacionadas com colinearidade) não são afetadas por esta mudança.

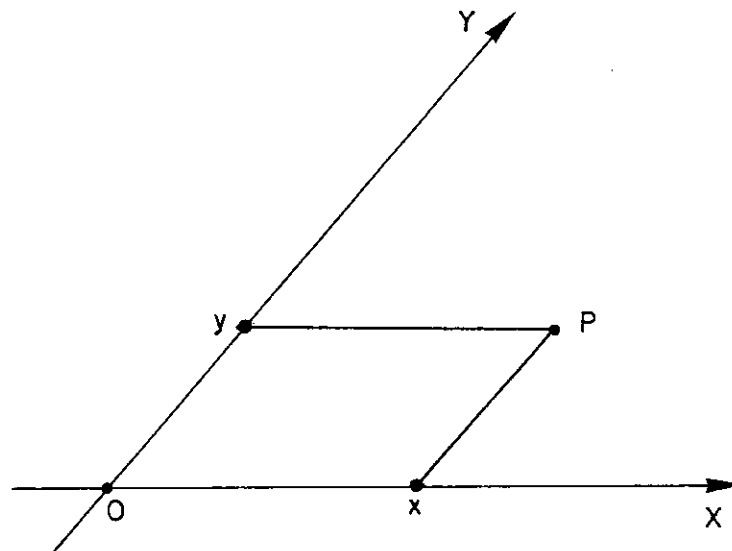



Fig. 3.3 - Coordenadas cartesianas não-retangulares.

O uso de um par de eixos (ortogonais ou não), não é a única maneira de se estabelecer correspondências entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. No sistema de *coordenadas polares* usa-se um único eixo OX.

Dado um par (R,θ) de números reais (com $R > 0$), obtém-se o ponto correspondente P do plano considerando a circunferência de centro O e raio R e sobre ela tomando um arco de θ radianos a partir do ponto de interseção com o semi-eixo positivo OX (no sentido anti-horário, se $\theta > 0$; no sentido horário, se $\theta < 0$).

O ponto assim resultante é facilmente expresso em coordenadas carte-

sianas relativas ao sistema de eixos ortogonais em que o eixo das abcissas é OX. Se (R, θ) são as coordenadas polares de um ponto P, as coordenadas cartesianas desse mesmo ponto são $(R\cos\theta, R\,\text{sen}\,\theta)$.

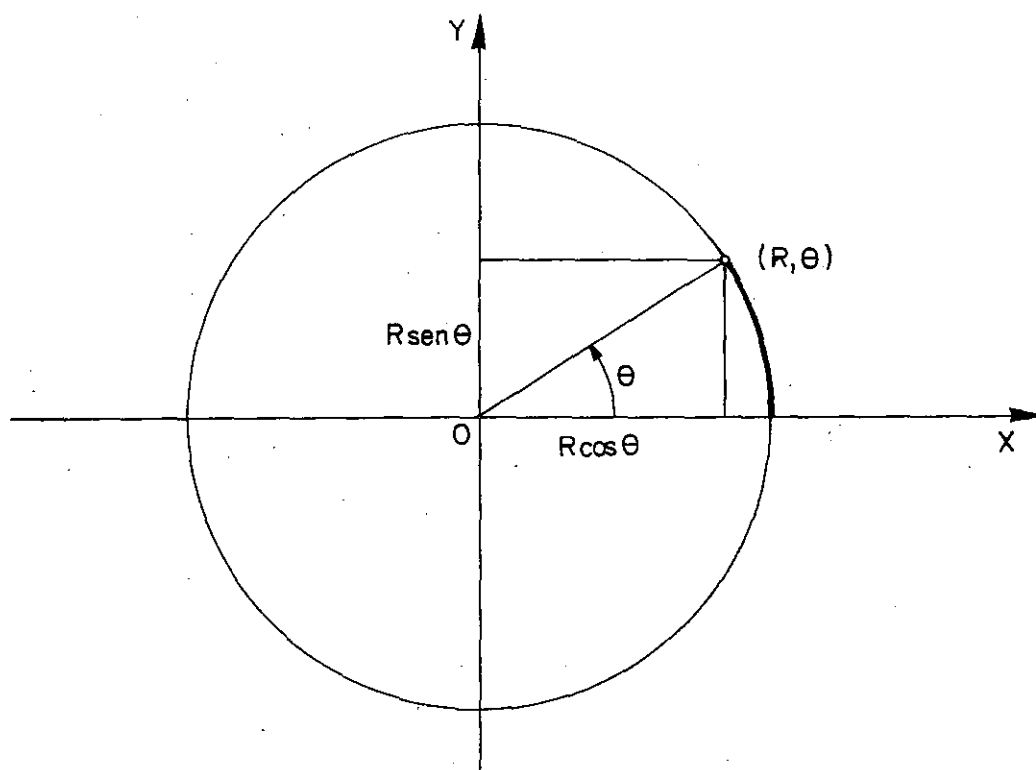



Fig. 3.4 - Sistema de coordenadas polares.

Uma desvantagem de utilizar coordenadas polares reside no fato de que a correspondência acima descrita não é biunívoca, já que se um ponto P do plano é dado em coordenadas polares por (R, θ), então todos os pares da forma $(R, \theta + 2k\pi)$ são associados a P. Entretanto, há certas figuras (particularmente aquelas construídas a partir de circunferências) cujo estudo fica facilitado com o uso de coordenadas polares.

4. Distância entre dois pontos

Dados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, queremos obter a expressão da distância $d(P_1, P_2)$ em termos das coordenadas de P_1 e P_2. Para isso, introduzimos o novo ponto $Q = (x_2, y_1)$.

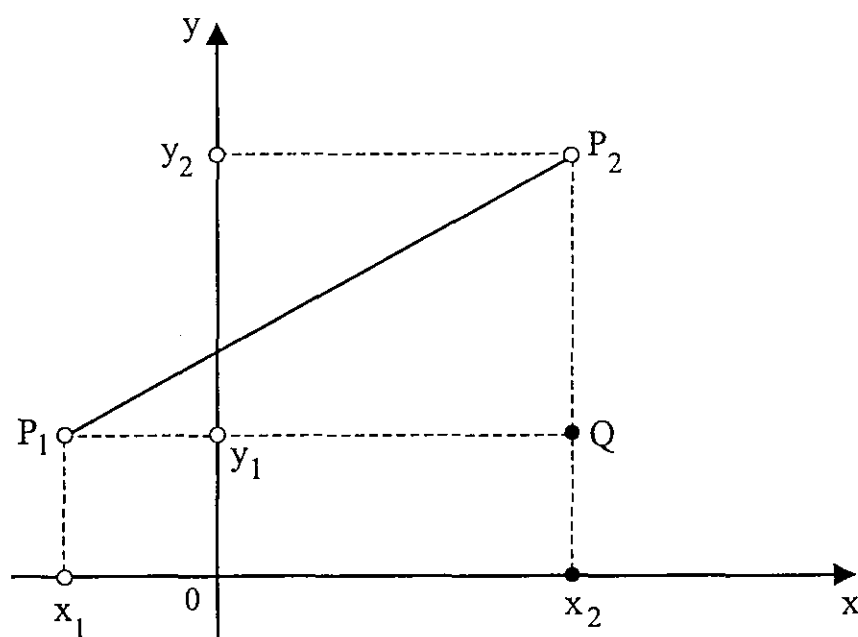



Fig. 4.1 - O triângulo P_1P_2Q é retângulo. Sua hipotenusa mede $d(P_1, P_2)$ e seus catetos medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$.

Como P_1 e Q têm a mesma ordenada, o segmento P_1Q é horizontal (paralelo ao eixo OX). Analogamente, o segmento P_2Q é vertical (pararelo a OY). Portanto P_1P_2 é a hipotenusa do triângulo retângulo P_1P_2Q. Pelo visto na seção 1, os catetos deste triângulo medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Resulta então do Teorema de Pitágoras que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Exemplo 1. (*Equação da circunferência.*) Dados o ponto $A = (a, b)$ e o número real $r > 0$, a circunferência C de centro A e raio r é,

como se sabe, o conjunto dos pontos do plano situados à distância r do ponto A. Assim, o ponto $P = (x, y)$ pertence a C se, e somente se, $\mathrm{d}(A, P) = r$. Levando em conta a fórmula da distância entre 2 pontos no plano, podemos escrever

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}$$

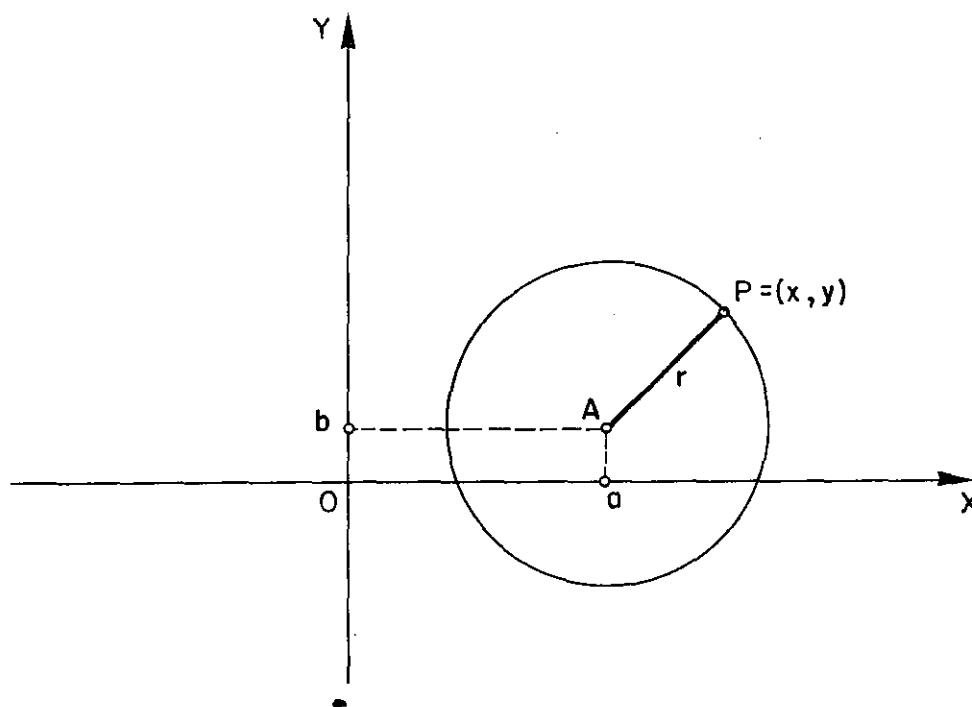



Fig. 4.2 - A circunferência de centro A e raio r.

Equivalentemente, podemos dizer que o ponto $P = (x, y)$ pertence à circunferência C se, e somente se,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (*)$$

Com efeito, dois números não-negativos (no caso, $\mathrm{d}(A, P)$ e r) são iguais se, e somente se, seus quadrados são iguais.

Diz-se, então, que $(*)$ é a equação da circunferência de centro (a, b) e raio r. Em particular, a equação da circunferência de raio r e centro na origem é $x^2 + y^2 = r^2$.

O Exemplo 1 ilustra uma idéia central em Geometria Analítica: a de associar a cada curva uma equação que relaciona a abcissa com a ordenada de cada ponto dessa curva. Uma vez obtida essa equação, as propriedades geométricas da curva podem ser deduzidas por métodos algébricos.

O Exemplo 2 a seguir mostra que, para resolver um problema de Geometria Analítica, devemos escolher o sistema de eixos ortogonais mais conveniente para o caso.

Exemplo 2. São dados dois pontos P e Q no plano e pergunta-se que forma tem o conjunto dos pontos M do plano tais que os quadrados de suas distâncias aos pontos P e Q respectivamente diferem por uma constante c.

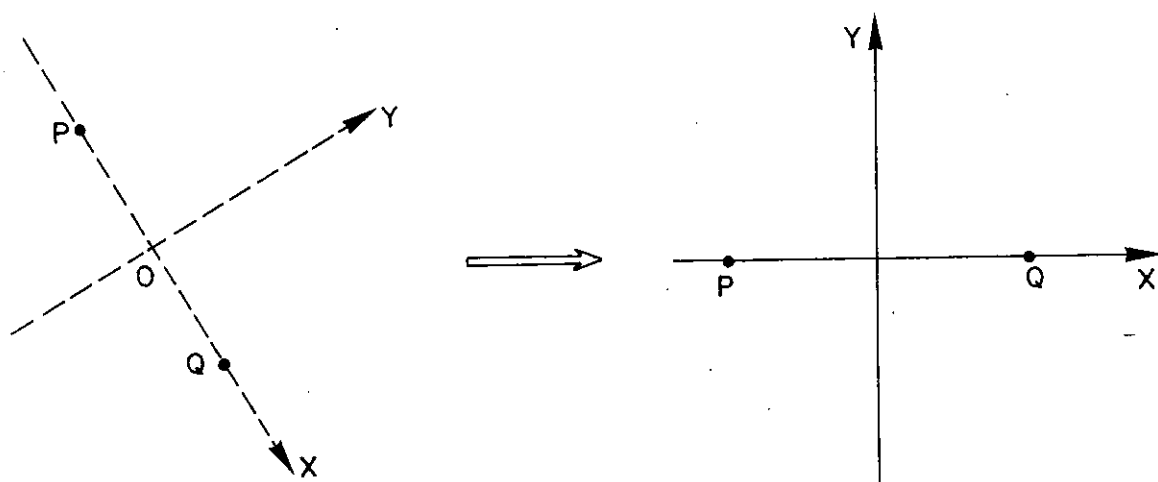



Fig. 4.3 - Escolhendo o sistema de eixos adequado.

Um sistema de eixos conveniente para este problema é aquele cujo eixo das abcissas contém P e Q e cuja origem é o ponto médio do segmento de reta PQ. Neste sistema, temos $P = (-a, 0)$ e $Q = (a, 0)$, onde $2a$ é a distância de P a Q. Queremos determinar o lugar dos pontos $M = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{d}(M, P)^2 - \mathrm{d}(M, Q)^2 = c,$$

isto é:

$$(x + a)^2 + y^2 - [(x - a)^2 + y^2] = c.$$

Simplificando, temos $4ax = c$, isto é, $x = c/4a$. Vemos que os pontos M que satisfazem à condição dada constituem uma reta, mais precisamente, uma perpendicular ao segmento PQ.

Enquanto o Exemplo 2 ilustra o uso de métodos algébricos para resolver um problema geométrico, o Exemplo 3 a seguir faz exatamente o oposto.

Exemplo 3. Determine quantas são as soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = -16 \end{cases}$$

É evidente que o problema pode ser resolvido por meios exclusivamente algébricos. Uma solução elegante pode, no entanto, ser obtida observando que as soluções de um sistema de equações com duas incógnitas são os pontos de interseção das curvas representadas pelas equações. Neste caso, cada equação representa uma circunferência, já que cada uma pode ser escrita na forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Para tal, basta somar a cada membro da equação os valores necessários para "completar os quadrados" no membro esquerdo.

Assim, $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ pode ser escrita como

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 + 1 + 1,$$

ou seja,

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2.$$

Da mesma forma, $x^2 + y^2 - 8x - 6y = -16$ é equivalente a

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2.$$

A posição relativa de duas circunferências depende da relação entre os raios e a distância entre os centros. A primeira circunferência tem centro $O_1 = (1, -1)$ e raio $R_1 = 2$; a segunda tem centro $O_2 = (4, 3)$ e raio $R_2 = 3$. A distância entre os centros é

$$\mathrm{d} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Como $\mathrm{d} = R_1 + R_2$, concluímos que as circunferências são tangentes exteriormente e que, portanto, o sistema dado tem exatamente uma solução (figura 4.4).

Da mesma forma como obtivemos no Exemplo 2 a equação de uma circunferência, podemos obter a equação de outras curvas, a partir de sua

definição geométrica.

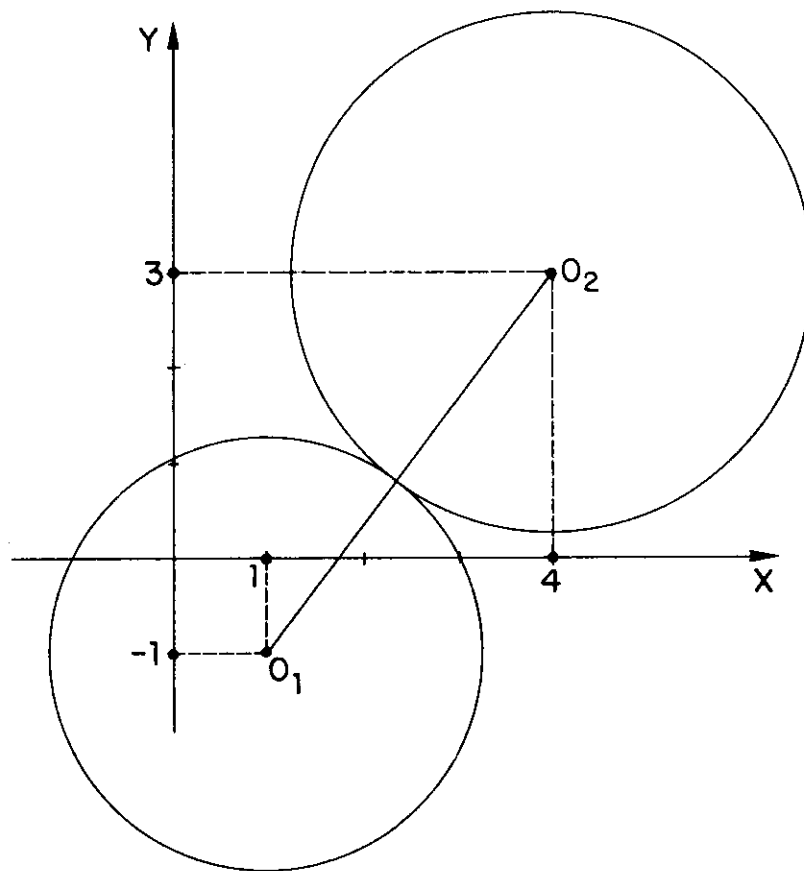



Fig. 4.4 - Resolvendo graficamente um sistema de equações.

Exemplo 4. Uma *elipse* de focos F e F' é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F e F' é igual a uma constante, denotada por $2a$.

É conveniente escolher um sistema de eixos tal que os focos tenham coordenadas $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$. A distância $2c$ entre os focos é chamada de *distância focal* da elipse. Um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse quando

$$\mathrm{d}(P, F) + \mathrm{d}(P, F') = 2a,$$

isto é:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

ou ainda,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

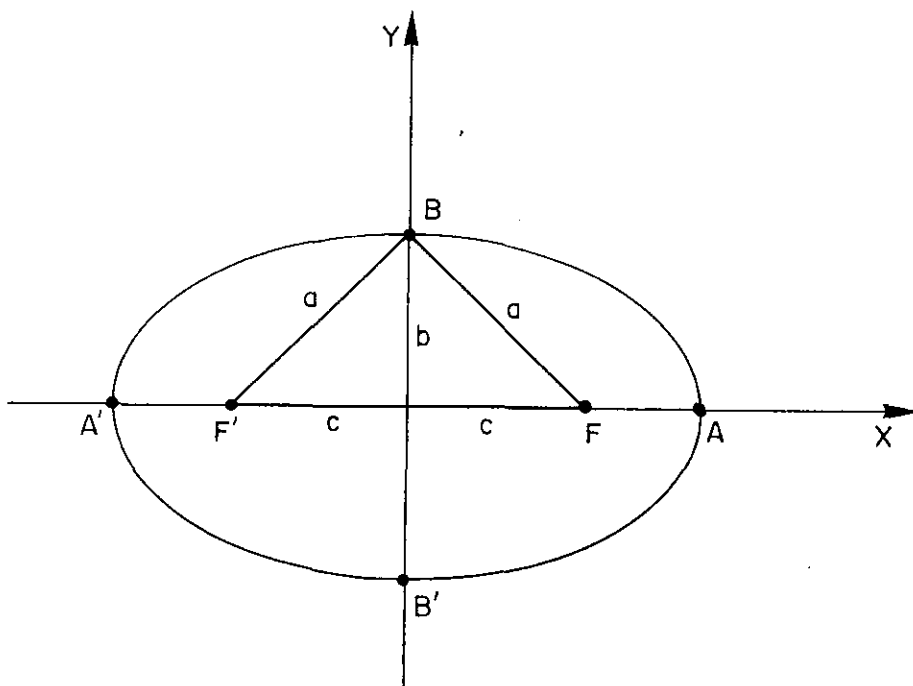



Fig. 4.5 - Elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Após simplificações, resulta

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

e daí

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

É usual representar a diferença $a^2 - c^2$ por b^2. A equação pode então ser escrita na forma

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 obtemos finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a forma mais usual de escrever a equação da elipse.

É fácil verificar que os pontos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$ (chamados de *vértices*) pertencem à elipse. AA' e BB' são eixos de simetria da elipse e são chamados de *eixo maior* (ou focal) e *eixo menor* (ou transverso) (figura 4.5).

Exemplo 5. Analogamente, podemos obter a equação da *hipérbole*, que é definida como o conjunto dos pontos cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias aos focos F e F' é uma constante $2a$. Se tomamos os eixos de forma que os focos sejam novamente $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$, a equação obtida é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde b^2 satisfaz $a^2 + b^2 = c^2$ (figura 4.6).

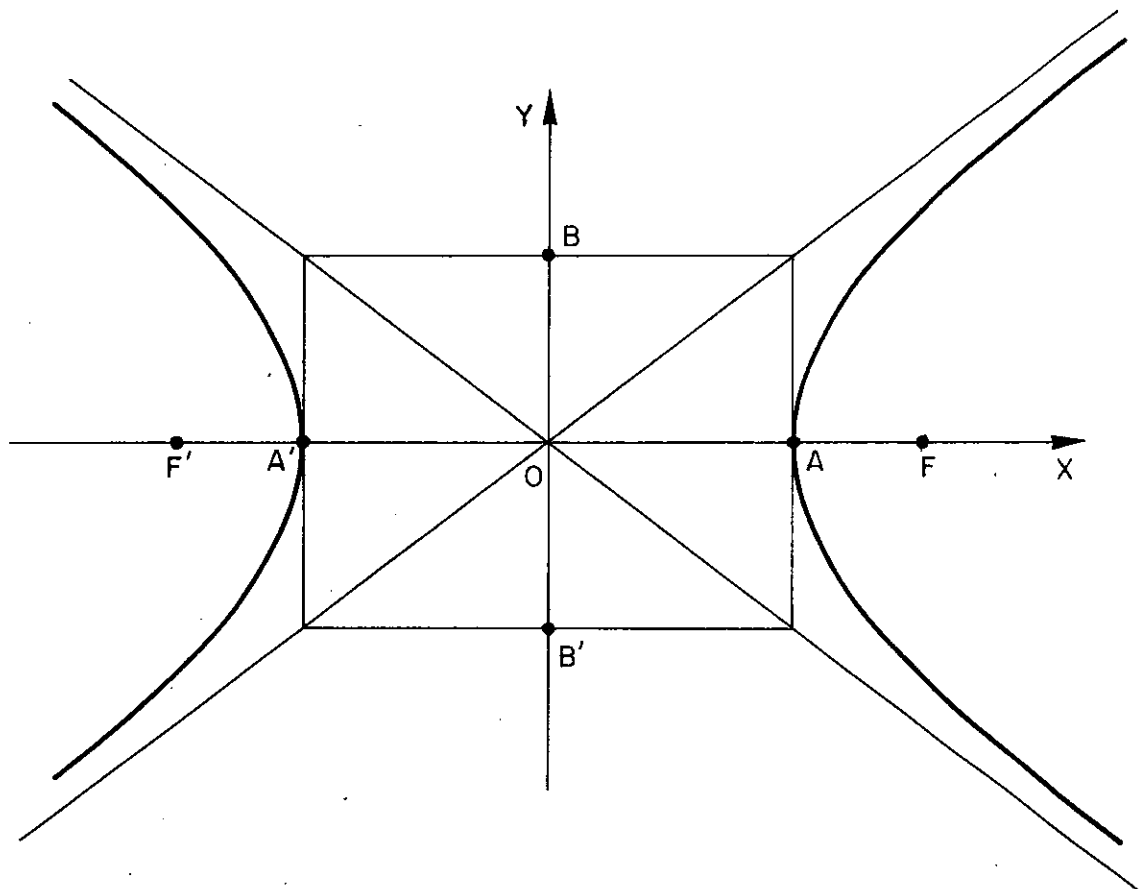



Fig. 4.6 - Hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Os pontos $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$, chamados de *vértices*, per-

tencem a hipérbole e determinam um de seus eixos de simetria (o eixo *focal* ou *real*). Os pontos $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$ são denominados vértices imaginários e determinam o eixo transverso ou imaginário da hipérbole. O retângulo cujos eixos de simetria são AA' e BB' está estreitamente relacionado com a geometria da hipérbole: suas diagonais são *assíntotas* à hipérbole.

Exemplo 6. Finalmente, consideramos a *parábola* de foco F e diretriz d, que é o conjunto dos pontos P que são equidistantes do ponto F e da reta d. É usual escolher um sistema de eixos no qual $F = (0, p/2)$ e d é a reta horizontal de equação $y = -p/2$ (a distância p entre F e d é chamada de *parâmetro* da parábola). Neste sistema, a parábola contém a origem e é simétrica em relação ao eixo OY (figura 4.7).

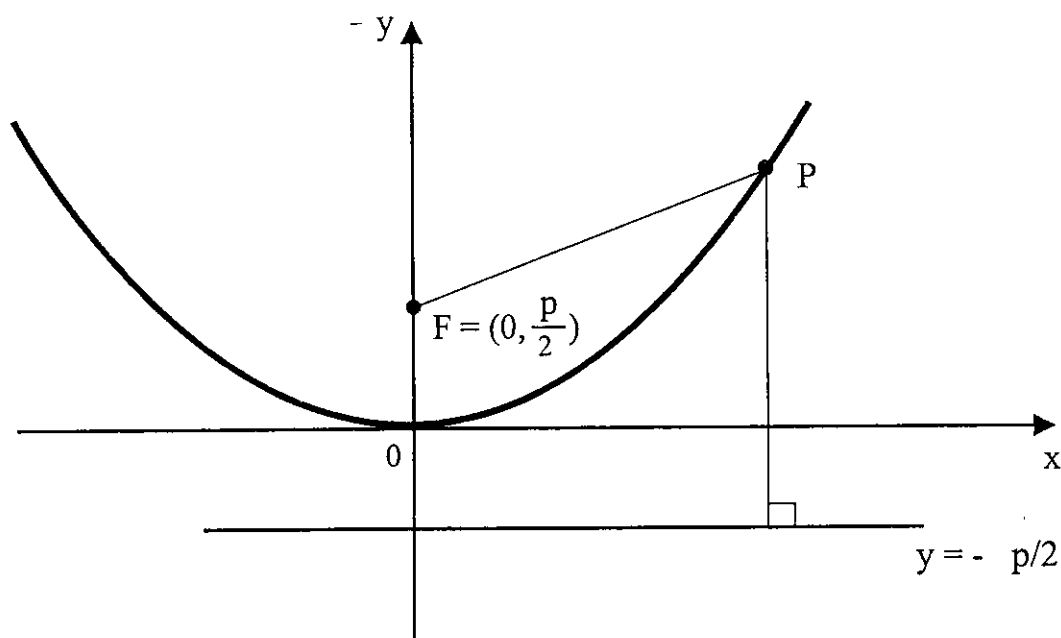



Fig. 4.7 - Parábola de equação $y = \frac{x^2}{2p}$

A distância de P a d é dada por $|y + p/2|$, enquanto a distância de P a F é $\sqrt{(x-0)^2 + (y - p/2)^2}$. Logo, a equação da parábola é

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

Elevando ao quadrado obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

e finalmente $y = \frac{x^2}{2p}$.

Exemplo 7. (Rotação de 90°.) Sejam $P = (x, y)$ e $P' = (-y, x)$. Pela fórmula da distância, temos $\mathrm{d}(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{d}(O, P')$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, P')^2 &= (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) = \\ &= \mathrm{d}(O, P)^2 + \mathrm{d}(O, P')^2. \end{aligned}$$

Logo OPP' é um triângulo isósceles, retângulo em O.

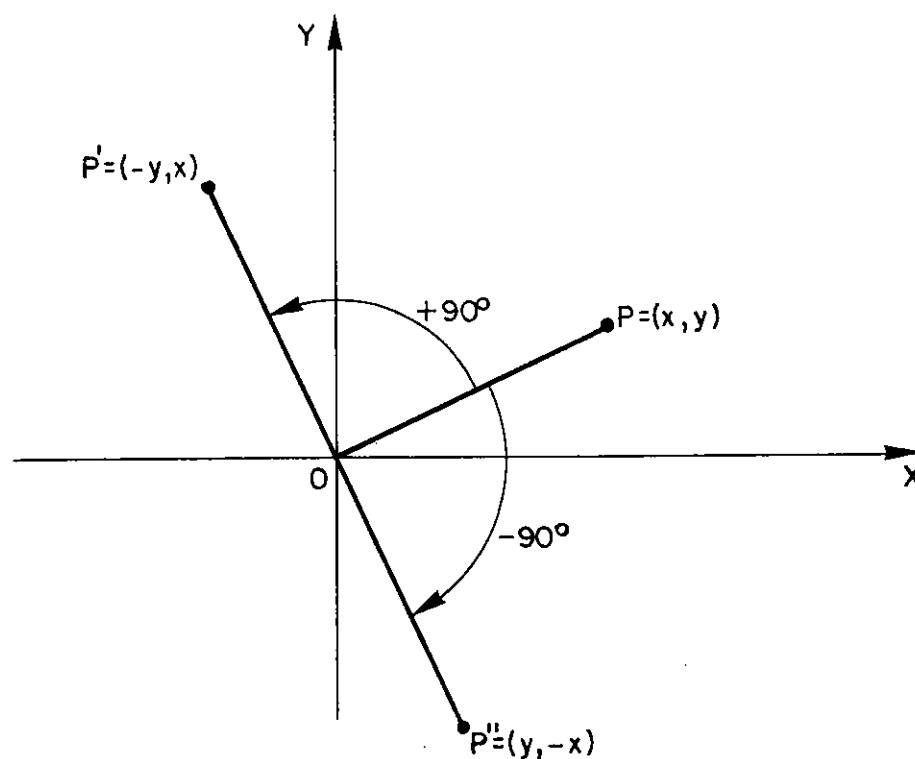



Fig. 4.8 - P' é obtido de P por uma rotação positiva de $90°$ e P'' é obtido por uma rotação negativa.

Isto significa que o ponto $P' = (-y, x)$ é obtido do ponto $P = (x, y)$ pela rotação de 90° do segmento OP em torno da origem O. Um cálculo análogo mostra que também o ponto $P'' = (y, -x)$ é obtido de P mediante uma rotação de 90° do segmento OP em torno de O, só que, desta vez, a rotação é no sentido contrário ao da anterior.

Convencionaremos dizer que a rotação de 90° que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (-y, x)$ tem sentido *positivo* (sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio habitual). Ela é a rotação mais curta que leva a semi-reta OX na semi-reta OY. A rotação mais curta que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P'' = (y, -x)$ diz-se que tem sentido *negativo*.

5. Gráfico de uma função

Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real, tendo por domínio o subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Chama-se *gráfico* de f o conjunto $G = G(f)$ dos pontos (x, y) do plano tais que $x \in D$ e $y = f(x)$:

$$G = G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in D, y = f(x)\} =$$
$$= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in D\}.$$

Freqüentemente, diz-se apenas que G é o conjunto definido pela equação $y = f(x)$.

A fim de que o conjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ seja o gráfico de uma função cujo domínio é o conjunto $D \subset \mathbb{R}$, é necessário e suficiente que, para todo $x \in D$, exista precisamente um ponto (x, y) em G cuja abcissa é x. Noutras palavras, G é gráfico de uma função f com domínio D se, e somente se, considerando D como parte do eixo das abcissas, toda reta vertical levantada por um ponto $(x, 0)$ com $x \in D$ corta G num único ponto (x, y), onde $y = f(x)$.

Se não especificarmos a priori o domínio D, podemos dizer que, para um conjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ ser gráfico de alguma função real de uma variável real, é necessário e suficiente que nenhuma reta vertical corte G em mais de um ponto. Neste caso, o domínio D da função f que tem G como gráfico é formado pelos números reais x tais que a reta vertical de abcissa x corta G em algum ponto (único). Se este ponto é (x, y), põe-se $y = f(x)$ e isto define a função $f: D \to \mathbb{R}$ que tem G como gráfico.

Exemplo 1. Uma circunferência não pode ser gráfico de nenhuma função pois há retas verticais que a cortam em 2 pontos. Por outro lado, se considerarmos, por exemplo, a função $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, para todo ponto (x, y) do seu gráfico temos $y = \sqrt{1 - x^2}$ logo $y \geq 0$ e $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, o gráfico de f é uma semi-circunferência de raio 1 e centro na origem. (Mais precisamente, a semi-circunferência superior. Se a função fosse $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

teríamos a semi-circunferência inferior.)

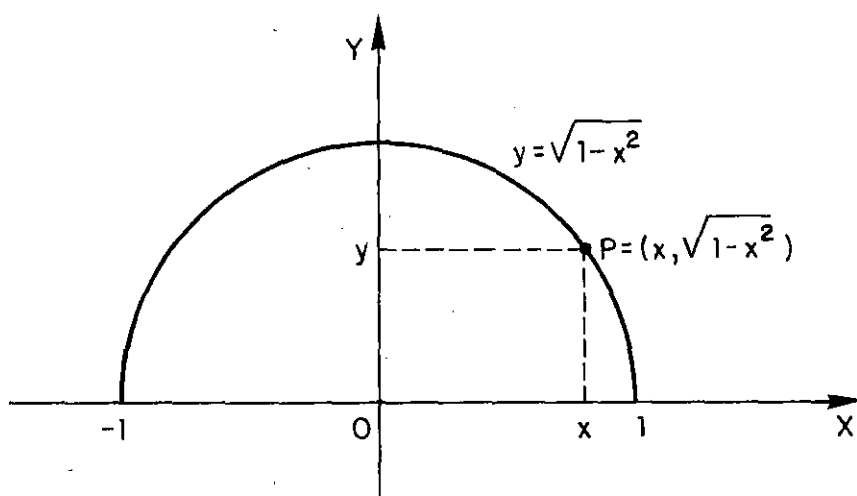



Fig. 5.1 - A semi-circunferência $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.

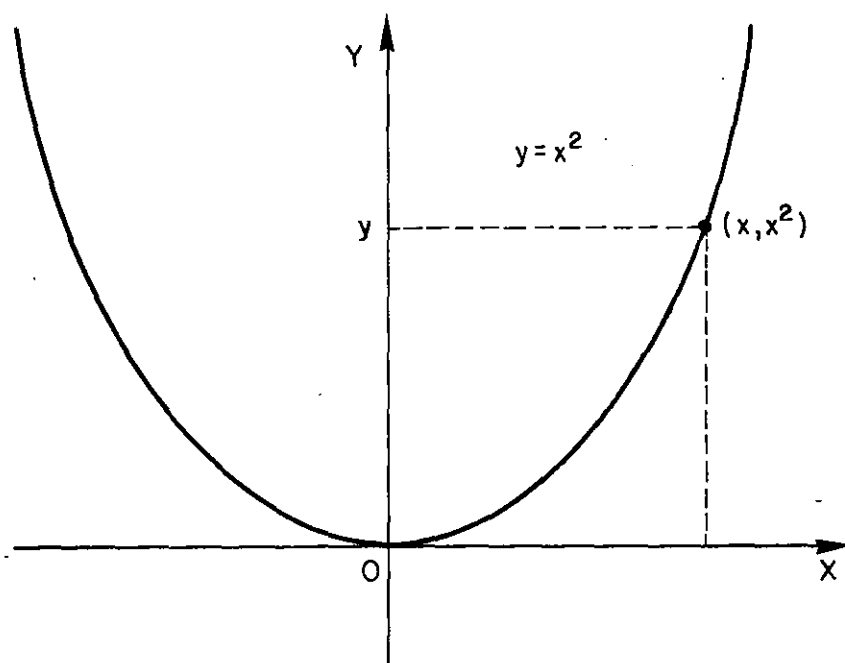



Fig. 5.2 - O gráfico da função $f(x) = x^2$.

Exemplo 2. A figura 5.2 apresenta o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. A curva de equação $y = x^2/2p$, representa uma parábola, como vimos na seção 4. Portanto o gráfico de f, cuja equação pode ser escrita como $y = x^2/(2 \times 1/2)$, é uma parábola de parâmetro $1/2$. Mais geralmente, se $a \neq 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem forma semelhante e é também uma parábola (se $a < 0$ sua abertura é voltada para baixo). De fato, quando estudarmos mudanças de

coordenadas veremos que, escolhendo adequadamente os eixos, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser descrito pela equação mais simples $y = ax^2$.

6. A reta como gráfico de uma função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes reais. Se $b = 0$, a função diz-se *linear*.

Uma reta vertical é perpendicular ao eixo OX (e paralela a OY) logo seus pontos têm todas a mesma abcissa c. A equação de uma reta vertical é $x = c$. Evidentemente, ela não pode ser gráfico de uma função $y = f(x)$. Por outro lado, qualquer reta não-vertical r é o gráfico de uma função $y = f(x)$ onde o domínio de f é todo o conjunto $\mathbb{R}$, pois toda reta vertical corta r num único ponto. O teorema abaixo diz que tipo tem essa função f.

Teorema. *O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical. Reciprocamente, toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.*

Demonstração: Para provar que o gráfico da função afim $f(x) = ax+b$ é uma reta, basta tomar três pontos quaisquer

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), \quad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \quad \text{e} \quad P_3 = (x_3, ax_3 + b),$$

com $x_1 < x_2 < x_3$, nesse gráfico e mostrar que eles são colineares, isto é

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) + \mathrm{d}(P_2, P_3) = \mathrm{d}(P_1, P_3).$$

Ora, como $x_2 - x_1, x_3 - x_2$ e $x_3 - x_1$ são positivos, tem-se

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$\mathrm{d}(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{d}(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

donde se segue imediatamente o resultado desejado.

Reciprocamente, dada uma reta não-vertical r, sua interseção com o eixo OY é um ponto cuja ordenada chamamos b. Fixamos um ponto

(x_0, y_0) na reta r, com $x_0 \neq 0$, e pomos $a = (y_0 - b)/x_0$.

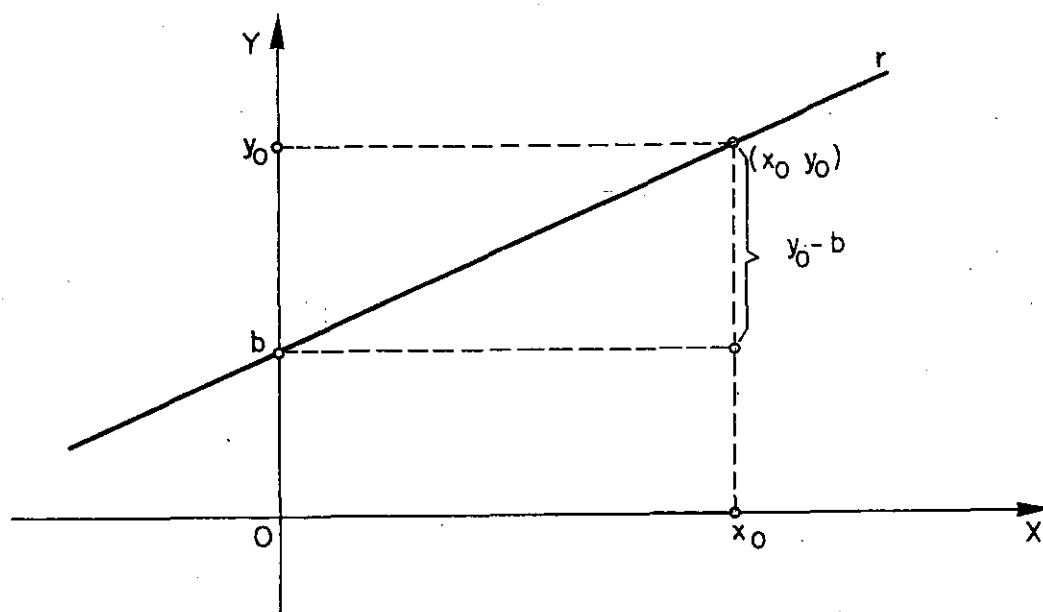



Fig. 6.1 - A reta não-vertical r é gráfico da função afim $y = ax + b$ com $a = (y_0 - b)/x_0$.

Afirmamos que a reta r é o gráfico da função afim $y = ax + b$.

Com efeito, já vimos que esse gráfico é uma reta s, a qual contém o ponto (x_0, y_0), pois

$$ax_0 + b = \frac{y_0 - b}{x_0} x_0 + b = y_0.$$

A reta s contém ainda o ponto $(0, b)$ pois $f(0) = b$. Como r também contém esses 2 pontos concluimos que o gráfico de f é r pois só existe uma reta passando por 2 pontos dados.

Tendo mostrado que uma reta não-vertical é o gráfico de uma função afim $y = ax + b$, cabe indagar qual o significado geométrico dos números a e b.

Já vimos que b é a ordenada do ponto $(0, b)$ onde a reta dada corta o eixo vertical. Quando $b = 0$, temos a reta $y = ax$, que passa pela origem.

Por sua vez, a é a variação que sofre a ordenada de um ponto sobre a reta quando se dá um acréscimo unitário à sua abcissa: se $y_0 = ax + b$ e $y_1 = a(x + 1) + b$, então $y_1 - y_0 = a$.

Mais geralmente, a é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta: se $x_0 \neq x_1$ e $y_0 = ax_0 + b$, $y_1 = ax_1 + b$ então $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = a$.

O número a chama-se a *inclinação* da reta $y = ax + b$. A função $f(x) = ax + b$ é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$. Quanto maior for o valor absoluto de a, mais íngreme é a reta em relação ao eixo horizontal. Quando $a = 0$, a função $f(x) = ax + b$ reduz-se à constante b e a equação $y = b$ define uma reta horizontal. Retas horizontais, portanto, têm inclinação zero. Às vezes diz-se também que retas verticais têm inclinação infinita.

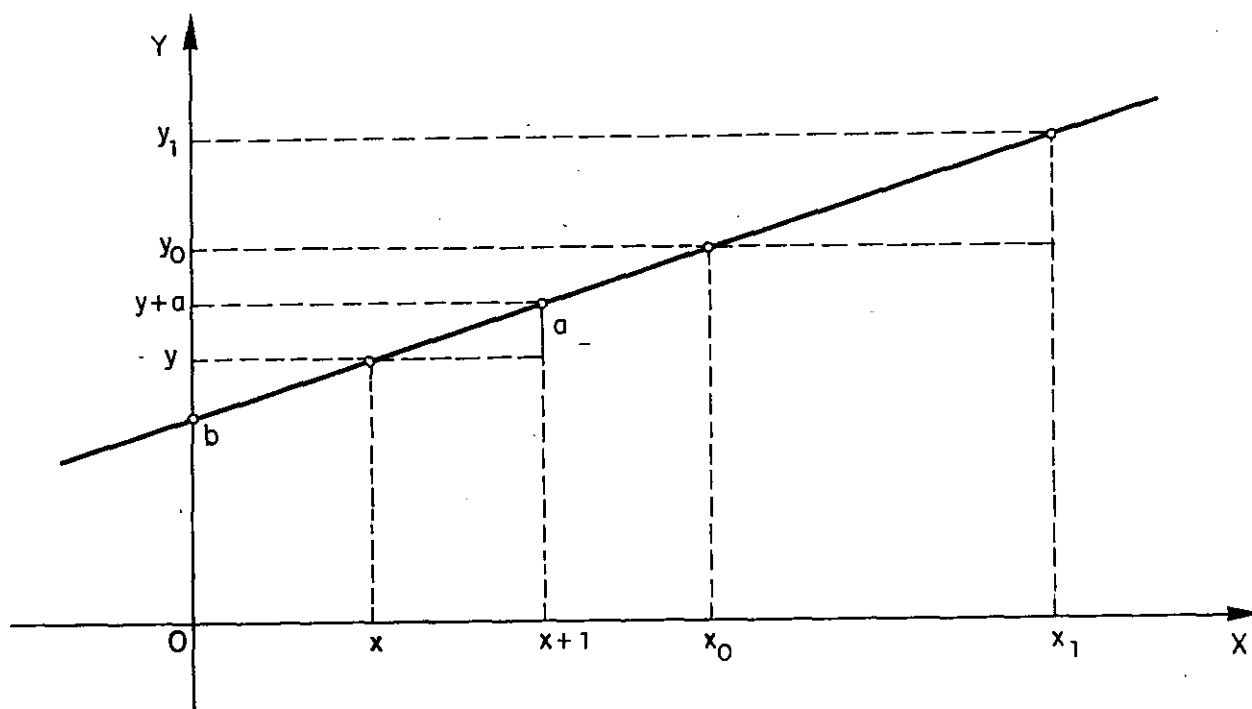



Fig. 6.2 - **Na reta** $y = ax + b$, **sempre que** $x_0 \neq x_1$ **tem-se** $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = a$.

Olhando para os triângulos retângulos na Figura 6.2 vemos que a é a tangente trigonométrica do ângulo que a reta $y = ax + b$ forma com o eixo horizontal.

As retas do tipo $y = x + b$, que têm inclinação 1, são igualmente inclinadas em relação aos 2 eixos. Em particular, a reta $y = x$, cujos pontos têm abcissa e ordenada iguais, chama-se a *reta diagonal* de $\mathbb{R}^2$.

A idéia de inclinação de uma reta como taxa de crescimento da ordenada y em relação ao crescimento da abcissa x deixa bastante claro o significado da equação $y = ax + b$. Ela nos diz que, partindo de $x = 0$ (quando se tem $y = b$), o valor de y é sempre igual a esse valor inicial b acrescido de a vezes a variação x.

Exemplo. O manual do Imposto de Renda de 1991 estabelecia as se-

guintes regras para cálculo do imposto

Renda Líquida	Alíquota	Parcela a Deduzir
Até 328.623,00	—	—
De 328.623,00 a 1.095.408,00	10%	32.862,00
Acima de 1.095.408,00	25%	197.173,00

Isto significa que o Imposto de Renda a pagar é uma função afim por partes da renda líquida x, expressa por

$$y = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 328.623 \\ 0,1x - 32.862, & \text{se} \quad 328.623 \leq x \leq 1.095.408 \\ 0,25x - 197.173, & \text{se} \quad x > 1.095.408 \end{cases}$$

As alíquotas em cada faixa de renda representam o imposto de renda adicional a ser pago por cada cruzeiro a mais de renda dentro da faixa.

O espírito da regra de taxação é o seguinte: rendas até 328.623 não pagam imposto; importâncias em excesso de 328.623 mas inferiores a $1.095.408$ são taxadas em 10% da parcela que exceder 328.623; finalmente, se a renda ultrapassar $1.095.408$, além dos 10% devidos sobre a diferença $1.095.408 - 328.623$, são cobrados mais 25% do que exceder $1.095.408$.

Graficamente, a regra de taxação é representada na figura 6.3.

A equação do 1º trecho (para $x < 328.623$) é $y = 0$. O 2º trecho (para $328.623 \leq x \leq 1.095.408$) é um segmento de reta passando por $A = (328.623, 0)$ e de inclinação $0,1$; logo, sua equação é

$$y = 0 + 0,1(x - 328.623);$$

isto é,

$$y = 0,1x - 32.862,30,$$

o que explica a parcela a deduzir da 2ª faixa. Finalmente, o 3º trecho tem inclinação $0,25$ e passa pelo ponto B, cujas coordenadas são

$$x = 1.095.408 \quad \text{e}$$

$$y = 0,1 \times 1.095.408 - 32.862,30 = 76.678,50.$$

Logo, a equação do último trecho é dada por

$$y = 76.678,50 + 0,25(x - 1.095.408),$$

ou seja,

$$y = 0,25x - 197.173,50,$$

o que explica a parcela a deduzir da 3ª faixa.

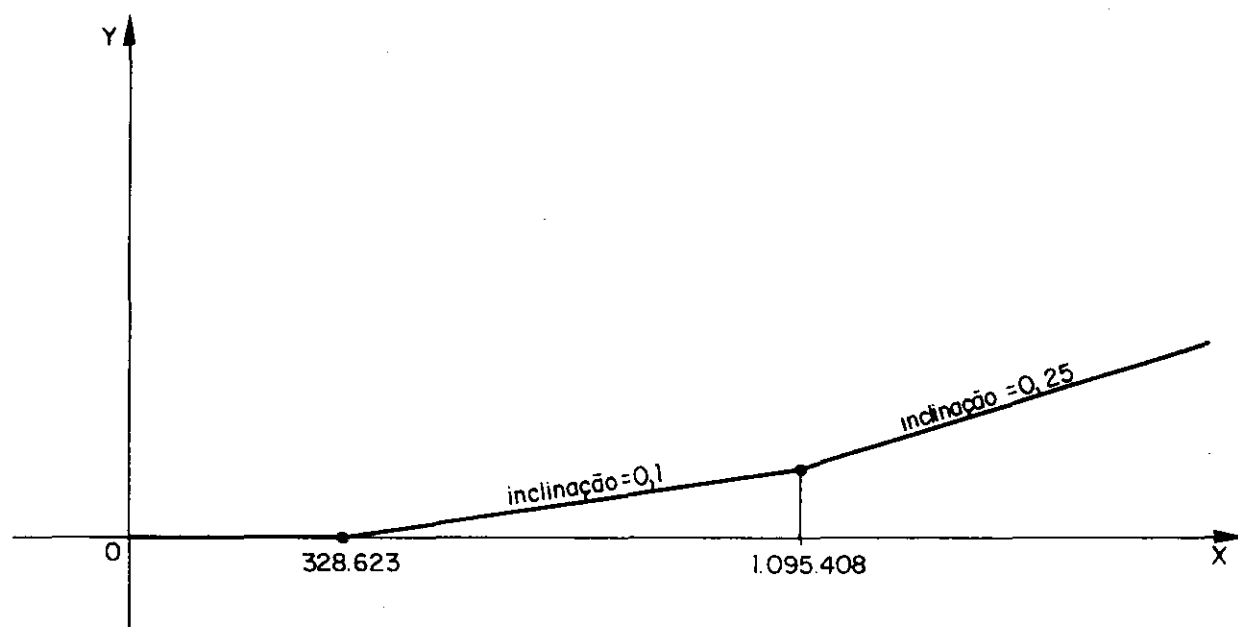



Fig. 6.3 - O imposto a pagar em função da renda.

7. Retas paralelas

Como já dissemos, o método de trabalho da Geometria Analítica consiste em relacionar fatos geométricos com dados algébricos, de modo a tirar conclusões de um lado a partir de informações do outro. Como exemplo desse método, consideremos a questão de saber se duas retas do plano são paralelas ou não.

Evidentemente, todas as retas verticais são paralelas de modo que basta considerar retas não-verticais, isto é, gráficos de funções afins, representadas por equações do tipo $y = ax + b$.

A conclusão é: as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são paralelas se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$, isto é, têm a mesma inclinação e cortam o eixo vertical em pontos diferentes.

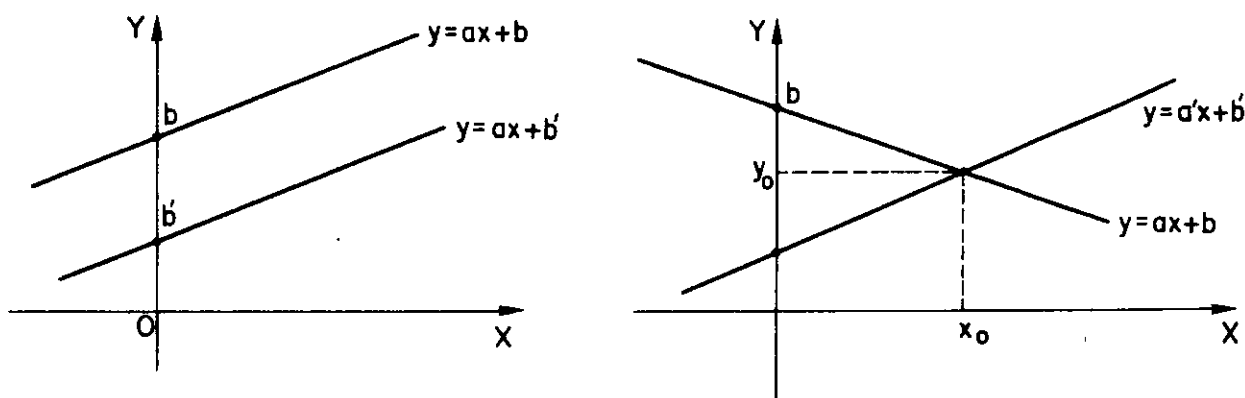



Fig. 7.1 - Retas paralelas têm a mesma inclinação a. Se $a \neq a'$, as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ encontram-se no ponto $(x_0, ax_0 + b)$, onde $x_0 = (b' - b)/(a - a')$.

Para justificar esta conclusão, observemos inicialmente que se $b \neq b'$ então, para todo valor de x, tem-se $ax + b \neq ax + b'$. Isto significa que dois pontos, um na reta $y = ax + b$ e outro na reta $y = ax + b'$ (com igual inclinação a), que tenham a mesma abcissa x, têm ordenadas diferentes. Logo essas duas retas não possuem pontos em comum: são

paralelas.

Reciprocamente, se as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são paralelas, em primeiro lugar deve-se ter $b \neq b'$ pois do contrário elas teriam em comum o ponto de abcissa zero. Além disso, deve-se ser $a = a'$ pois, se fosse $a \neq a'$, a equação $ax + b = a'x + b'$ teria a raiz $x_0 = (b' - b)/(a - a')$. Então, pondo $y_0 = ax_0 + b$, teríamos também $y_0 = a'x_0 + b'$, logo as duas retas teriam em comum o ponto (x_0, y_0).

8. Paralela a uma reta, por um ponto dado

Um dos fundamentos da Geometria Euclidiana é a afirmação de que por um ponto dado fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta.

Em termos da Geometria Analítica, temos uma reta $y = ax + b$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$, com $y_0 \neq ax_0 + b$. A paralela procurada deve ter equação $y = ax + b'$, com $b' \neq b$. Trata-se de achar b' de modo que essa paralela passe pelo ponto P. Isto nos dá a condição $ax_0 + b' = y_0$, logo devemos tomar $b' = y_0 - ax_0$. (Note que então $b' \neq b$.)

Portanto a reta paralela a $y = ax + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) tem a equação $y = ax + (y_0 - ax_0)$, ou seja $y = y_0 + a(x - x_0)$.

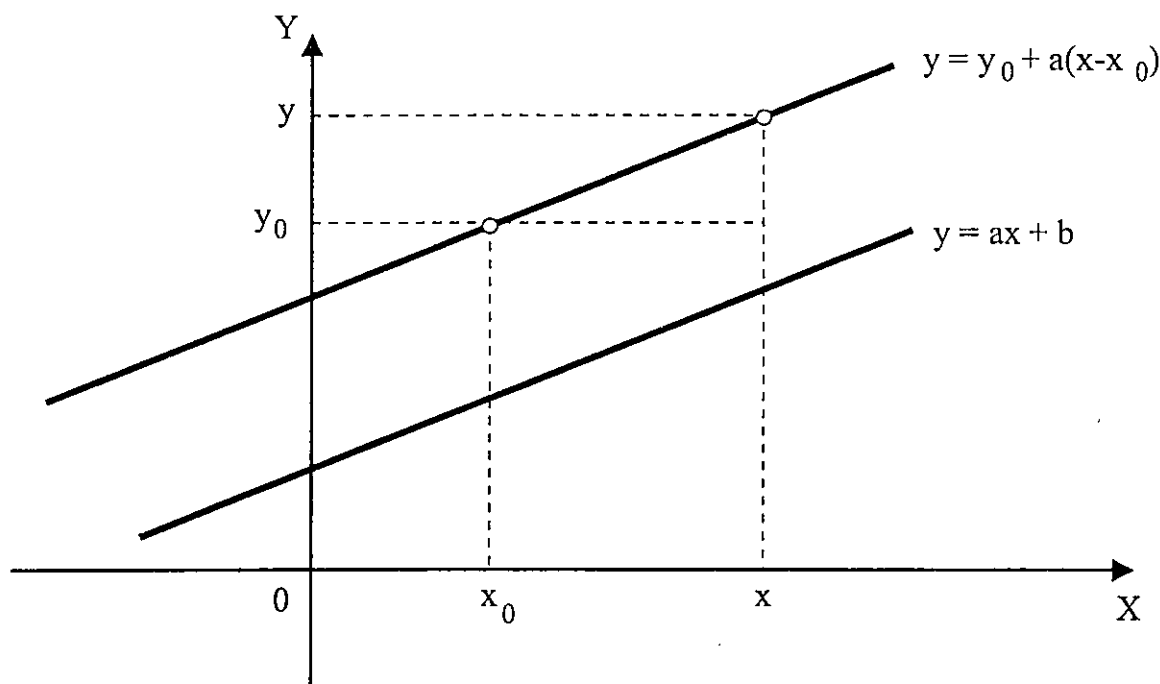



Fig. 8.1 - A reta $y = y_0 + a(x - x_0)$ **passa pelo ponto** (x_0, y_0) **e tem inclinação** a, **logo é paralela à reta** $y = ax + b$.

Exemplo 1. A reta paralela à diagonal $y = x$ que corta o eixo vertical no ponto $(0, b)$ tem equação $y = x + b$.

A equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela à reta $y = ax + b$ (isto é, tem inclinação a), quando escrita sob a forma $y = y_0 + a(x - x_0)$, torna evidente a solução: a ordenada y de um ponto da reta procurada começa com o valor y_0 quando $x = x_0$ e, para cada acréscimo $x - x_0$, dado a x a partir de x_0, o acréscimo de y deve ser $a(x - x_0)$, logo tem-se

$$y = y_0 + a(x - x_0).$$

Observação: Se a reta dada for vertical, sua paralela passando pelo ponto (x_0, y_0) também é vertical e tem equação $x = x_0$.

Exemplo 2. A paralela à reta $y = 2x + 5$ passando pelo ponto $(3, 4)$ tem por equação $y = 4 + 2(x - 3)$, ou seja, $y = 2x - 2$.

9. Reta que passa por dois pontos dados

Outro princípio básico da Geometria Euclidiana diz que por dois pontos dados no plano passa uma, e somente uma, reta.

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ esses pontos. Se $x_1 = x_2$, a reta que une esses dois pontos é vertical e tem equação $x = x_1$ (ou $x = x_2$).

Suponhamos então $x_1 \neq x_2$. A reta procurada tem inclinação

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e passa pelo ponto (x_1, y_1). Como se viu acima, sua equação é

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1. \tag{1}$$

Podíamos ter argumentado que a reta procurada passa pelo ponto (x_2, y_2), ainda com a mesma inclinação, e teríamos obtido sua equação na forma

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2. \tag{2}$$

Mas, como se vê facilmente, (1) e (2) são a mesma equação.

Outra maneira de tratar este problema é a seguinte: nossas incógnitas são os números a e b. Como a reta procurada passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), devemos ter:

$$y_1 = ax_1 + b,$$

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Subtraindo a primeira destas equações da segunda, obtemos

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

logo

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Entrando com este valor na primeira equação, vem

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

que é o valor do termo independente de x na equação (1) acima.

Exemplo 1. Determinar as equações das retas que são lados do triângulo ABC, onde $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ e $C = (3,2)$. Como A e B têm a mesma ordenada 1, a reta AB é horizontal. Sua equação é $y = 1$. AC passa pelo ponto $(1,1)$ e tem inclinação $(2-1)/(3-1) = 1/2$, logo sua equação é $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$, ou seja, $y = x/2 + 1/2$. Finalmente, BC passa pelo ponto $(4,1)$ com inclinação $(2-1)/(3-4) = -1$, logo sua equação é $y = 1 - (x-4) = -x + 5$.

Exemplo 2. Fazendo $x = (x_1 + x_2)/2$ na equação (1) obtém-se $y = (y_1 + y_2)/2$. Portanto o ponto

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

pertence à reta que liga os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Como a abcissa de M está entre as abcissas de P_1 e P_2, o ponto M pertence ao segmento de reta P_1P_2. Mais precisamente, a abcissa de M é o ponto médio do intervalo $[x_1, x_2]$ do eixo das abcissas. Logo

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

é o ponto médio do segmento de reta P_1P_2.

10. Retas perpendiculares

Como se exprime, em Geometria Analítica, a condição para que duas retas sejam perpendiculares? Se uma delas é horizontal (equação $y = b$) então a outra é vertical (equação $x = c$) e não há mais o que dizer. Portanto, podemos novamente nos restringir a retas não-verticais e não-horizontais, cujas equações são $y = ax + b$, $y = mx + n$, com $a \neq 0$ e $m \neq 0$.

Consideremos inicialmente duas retas passando pela origem. Suas equações são $y = ax$ e $y = mx$. Supondo-as perpendiculares tomemos o ponto $P = (1, a)$ sobre a primeira. Fazendo uma rotação positiva de $90°$ em torno da origem, o ponto P vai cair sobre o ponto $P' = (-a, 1)$. (Veja Exemplo 7, seção 4.) Como as duas retas dadas são perpendiculares, o ponto P' pertence à segunda reta, isto é, sua ordenada 1 é igual à sua abcissa $-a$ multiplicada por m. Portanto $1 = (-a)m$, ou seja, $m = -1/a$.

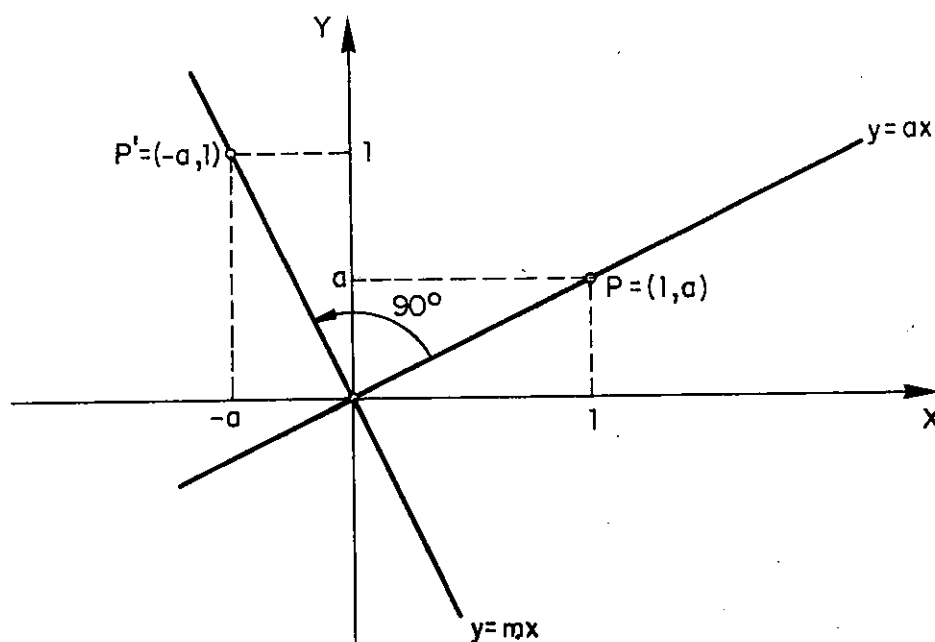



Fig. 10.1 - Se as retas $y = ax$ e $y = mx$ são perpendiculares então uma rotação de $90°$ leva uma sobre a outra.

Reciprocamente, se $m = -1/a$, as retas $y = ax$ e $y = mx$ são

perpendiculares pois a única reta perpendicular a $y = ax$ que passa pela origem tem, como acabamos de ver, a equação $y = -x/a$.

O caso geral, de duas retas $y = ax + b$ e $y = mx + n$, que podem passar ou não pela origem, reduz-se ao anterior pois elas são paralelas às retas $y = ax$ e $y = mx$, respectivamente, logo são perpendiculares se, e somente se, $am = -1$.

Outra maneira de mostrar que $ma = -1$ quando as retas $y = ax$ e $y = mx$ são perpendiculares consiste em lembrar que, no triângulo retângulo cujos vértices são $(0,0), (1,a)$ e $(1,m)$, a altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, Ora, a altura (baixada sobre a hipotenusa) mede 1, enquanto aqueles segmentos medem a e $-m$. (Vide Fig. 10.1.) Logo $a(-m) = 1$, ou seja, $am = -1$.

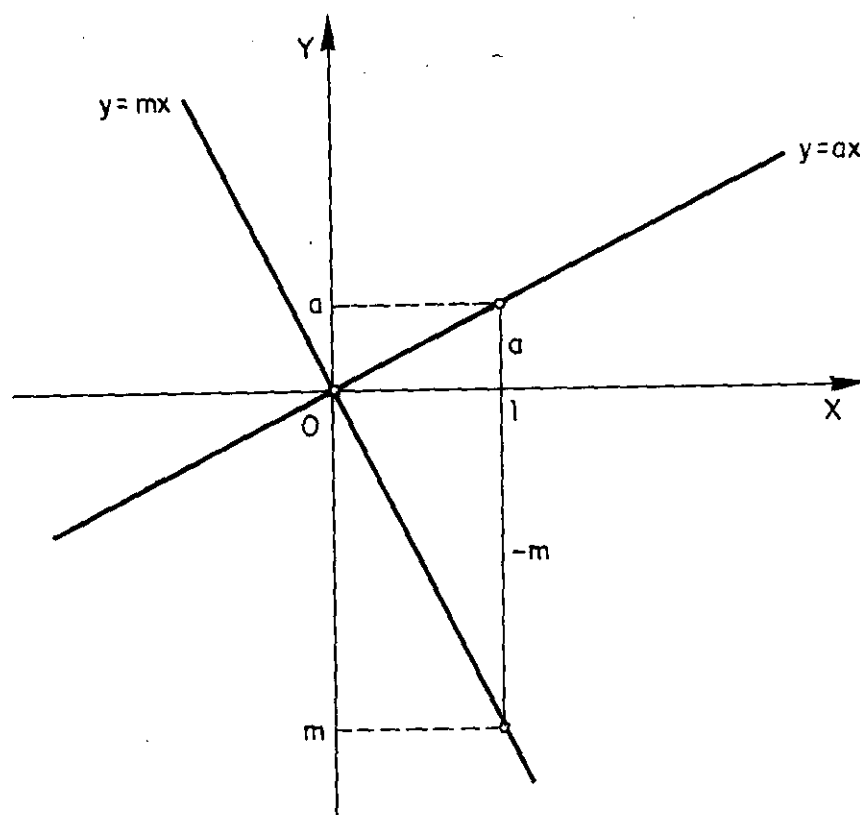



Fig. 10.2 - Se as retas $y = ax$ e $y = mx$ são perpendiculares e $a > 0$ então $m < 0$, logo $-m$ é um número positivo.

A reta r que passa por um ponto dado $P = (x_0, y_0)$ e é perpendicular à reta $y = ax + b$ coincide com a reta que passa por P e é paralela à reta $y = -x/a$, logo a equação de r é $y = y_0 - (x - x_0)/a$.

Exemplo: Sejam $A = (1,5)$, $B = (5,3)$ e $M = (3,4)$. A reta

que passa pelo ponto M e é perpendicular a AB tem equação $y = 4 + 2(x - 3)$, ou seja, $y = 2x - 2$. Observe que M é o ponto médio do segmento AB, logo $y = 2x - 2$ é a equação da mediatriz de AB.

11. Linhas de nível

Seja D um subconjunto do plano. Uma função real $\varphi: D \to \mathbb{R}$ associa a cada ponto P um D um número real $\varphi(P)$. Como $P = (x, y)$ é dado por suas coordenadas, podemos escrever $\varphi(x, y)$ em vez de $\varphi(P)$. Deste modo, vemos que φ é uma função real de 2 variáveis reais.

Exemplo 1. A fórmula $\varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ define uma função real de 2 variáveis reais, cujo domínio é o conjunto D, formado pelos pontos (x, y) do plano tais que $x^2 + y^2 \leq 1$, pois estes são os pontos para os quais $1 - x^2 - y^2$ possui raiz quadrada real. O domínio D é, portanto, o disco de raio 1 com centro na origem.

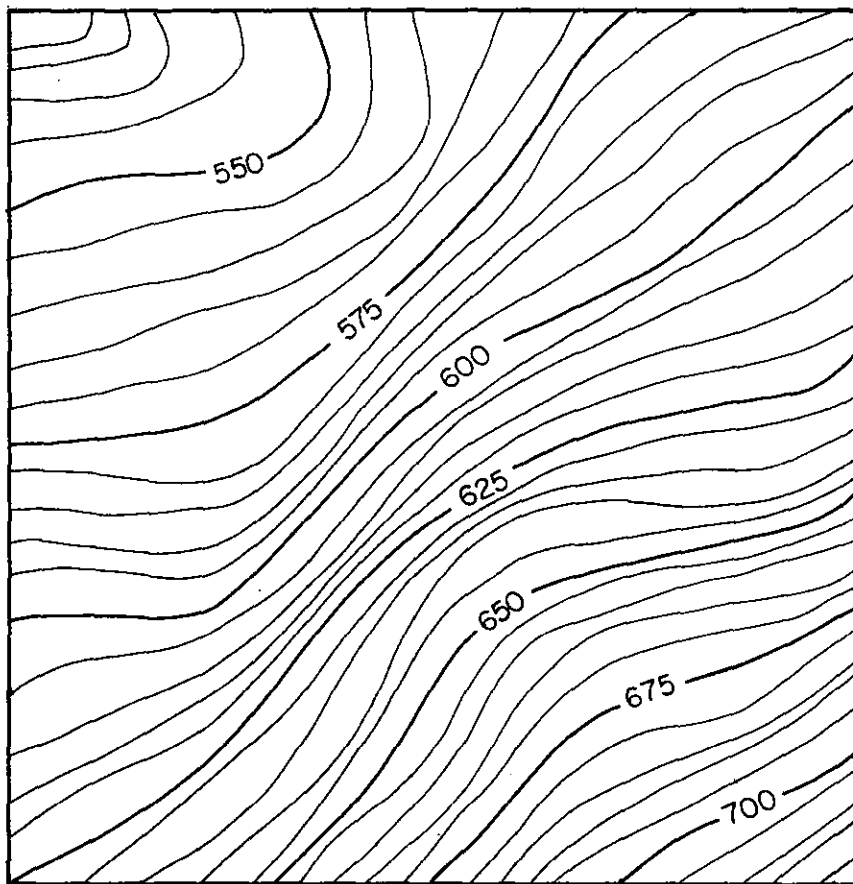



Fig. 11.1 - Um mapa de relevo.

Dada uma função $\varphi: D \to \mathbb{R}$ de duas variáveis reais, diz-se que o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ tem *nível c* (relativamente à função φ) quando

$\varphi(x_0, y_0) = c$. A *linha de nível* c da função φ é o conjunto dos pontos $(x, y) \in D$ tais que $\varphi(x, y) = c$.

A linguagem de "nível" provém dos mapas de relevo, nos quais a função φ mede a altura em relação ao nível do mar, considerando este como nível zero. A figura 11.1 mostra um desses mapas, com as respectivas linhas de nível.

Diz-se que a linha de nível c da função φ é definida *implicitamente* pela equação $\varphi(x, y) = c$. Em contraposição, o gráfico de uma função f de uma variável real é uma linha que se diz definida *explicitamente* pela equação $y = f(x)$.

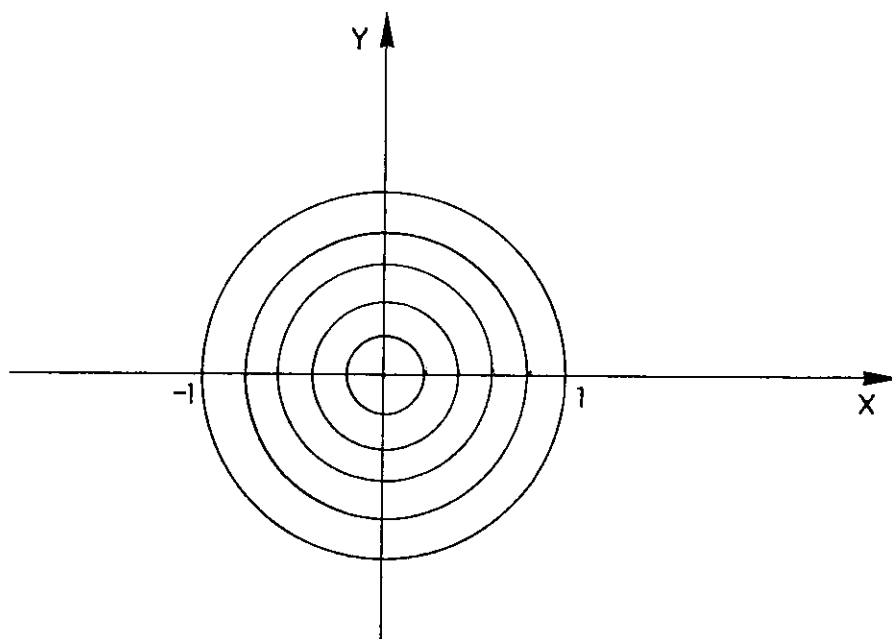



Fig. 11.2 - Linhas de nível da função $\varphi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Exemplo 2. Para cada $c \in [0, 1]$, ou seja, $0 \leq c \leq 1$, a função φ do Exemplo 1 tem como linha de nível c a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{1 - c^2}$, a qual é definida implicitamente pela equação

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = c,$$

isto é,

$$x^2 + y^2 = 1 - c^2.$$

A "linha" de nível 1 da função φ degenera-se, ficando reduzida a um só ponto: a origem. Para níveis c fora do intervalo $[0, 1]$ a linha de nível

$\varphi(x, y) = c$ é vazia pois nenhum valor $\varphi(x, y)$ é negativo nem maior do que 1.

Exemplo 3. Seja $f\colon D_0 \to \mathbb{R}$ uma função de uma só variável real, definida no conjunto $D_0 \subset \mathbb{R}$. A partir de f podemos definir uma função de duas variáveis $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto

$$D = D_0 \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D_0,\ y \in \mathbb{R}\},$$

pondo

$$\varphi(x, y) = y - f(x).$$

Vê-se imediatamente que o gráfico de f é a linha de nível zero de φ e que as demais linhas de nível de φ são "paralelas" ao gráfico de f. Mais precisamente, a linha de nível c de φ é o gráfico da função $g(x) = f(x) + c$.

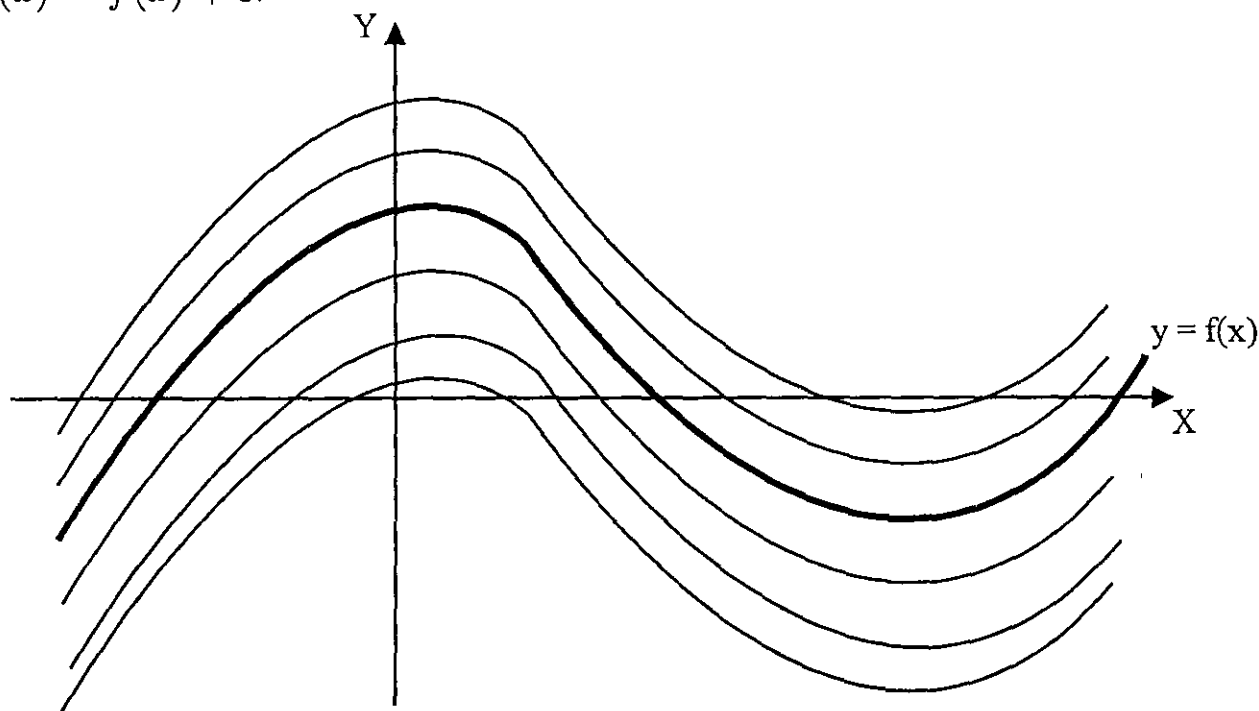



Fig. 11.3 - Linhas de nível da função $\varphi(x,y) = y - f(x)$.

Exemplo 4. Seja $\xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $\xi(x, y) = xy$. A linha de nível zero da função ξ é formada pela reunião dos eixos OX e OY. Para cada $c \neq 0$, a linha de nível $xy = c$ é formada por dois ramos

de uma curva chamada hipérbole equilátera.

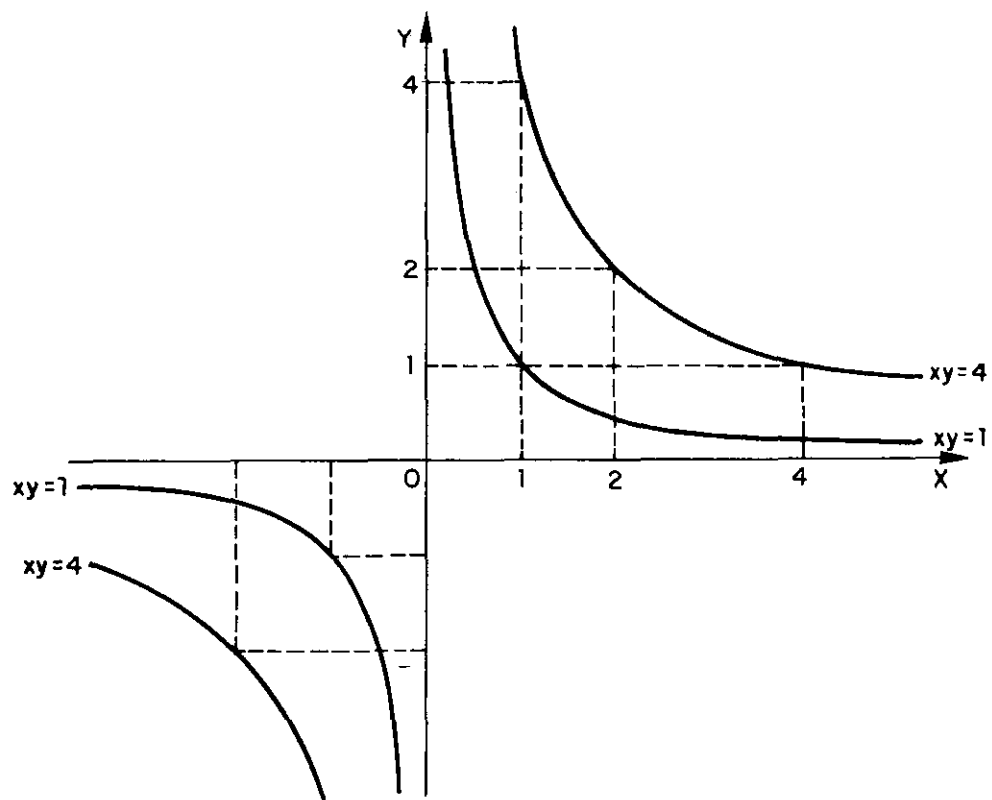



Fig. 11.4 - Algumas linhas de nível da função $\xi(x, y) = xy$.

12. A reta como linha de nível

Sejam a, b números reais, com $a^2 + b^2 \neq 0$. (Esta é uma maneira de dizer que a e b não são ambos iguais a zero.) A função $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x,y) = ax + by$, é o que se chama uma *função linear* de duas variáveis. Para todo $c \in \mathbb{R}$, a linha de nível c da função φ é o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $ax + by = c$, ou seja, é definida implicitamente pela equação $ax + by = c$.

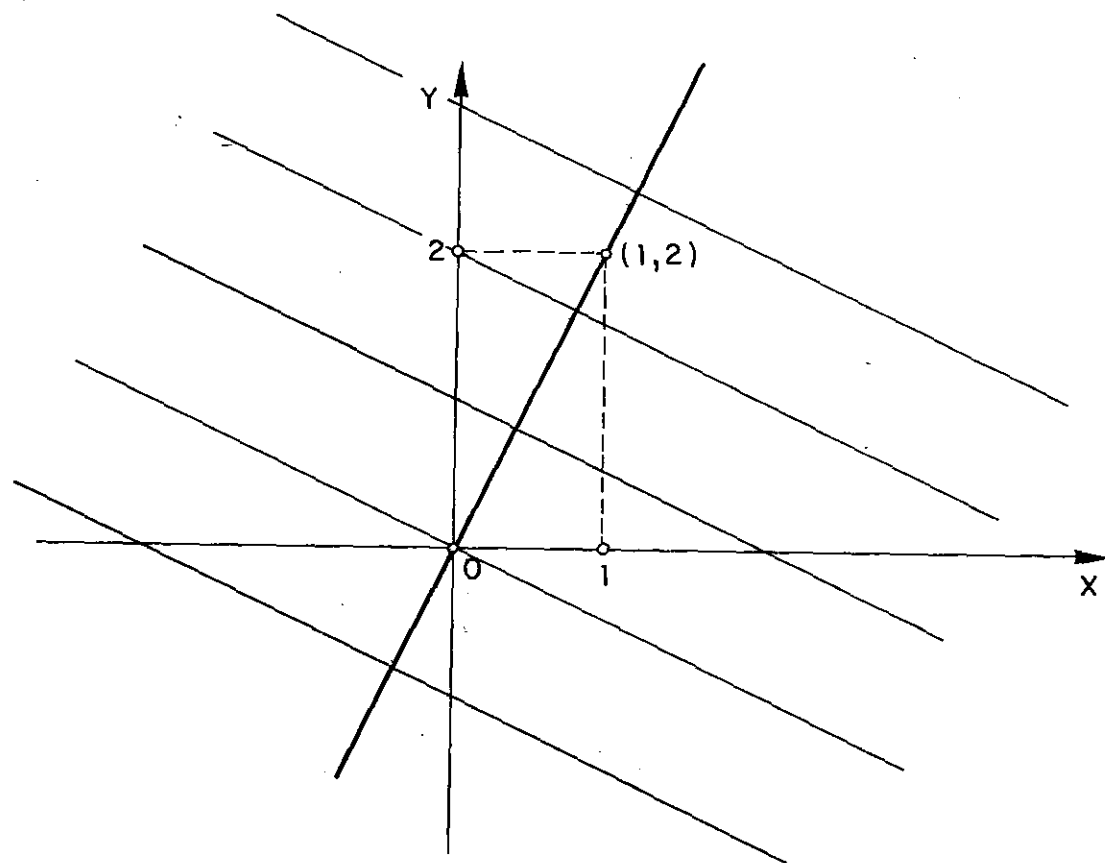



Fig. 12.1 - As linhas de nível da função linear $\varphi(x,y) = x + 2y$ são retas paralelas, todas elas perpendiculares à reta $y = 2x$, que passa pela origem e contêm o ponto $(1,2)$.

Se $b = 0$, a equação $ax + by = c$ reduz-se a $ax = c$, logo define a reta vertical $x = c/a$. Se $b \neq 0$, esta equação equivale a $y = (-a/b)x + c/b$, logo define uma reta de inclinação $-a/b$. Em

qualquer caso, podemos afirmar que:

As linhas de nível da função linear $\varphi(x,y) = ax + by$ *são retas paralelas entre si, perpendiculares à reta que passa pela origem e contém o ponto* (a,b).

Observamos que, se for $a \neq 0$, " a reta que passa pela origem e contém o ponto (a,b)" tem equação $y = (b/a)x$ e é perpendicular a toda reta de inclinação $-a/b$, isto é, a toda linha de nível da função $\varphi(x,y) = ax + by$. Se for $a = 0$, as linhas de nível de φ são horizontais e " a reta que passa pela origem e contém o ponto (a,b)" é o eixo vertical, logo ainda é perpendicular às linhas de nível de φ.

A representação $ax + by = c$ de uma reta como linha de nível da função linear $\varphi(x,y) = ax + by$ permite exprimir, de forma simples e elegante, a condição de perpendicularismo entre duas retas:

As retas $ax + by = c$ *e* $a'x + b'y = c'$ *são perpendiculares se, e somente se,* $aa' + bb' = 0$.

Com efeito (excetuando os casos $b = 0$, $b' = 0$, que podem ser facilmente analisados em separado), como a inclinação da primeira reta é $-a/b$ e da segunda é $-a'/b'$. Logo elas são perpendiculares se, e somente se $-a'/b' = b/a$, o que significa $aa' + bb' = 0$.

Exemplo: Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $(4,5)$ e é perpendicular à reta $3x - 2y = 1$? Pelo que foi visto acima, a equação procurada tem a forma $a'x + b'y = c'$, onde $3a' - 2b' = 0$, isto é, $3a' = 2b'$. A forma mais simples de cumprir esta condição é tomar $a' = 2$ e $b' = 3$. Então a equação de uma reta perpendicular a $3x - 2y = 1$ é $2x + 3y = c'$. Como a perpendicular que buscamos deve passar pelo ponto $(4,5)$, temos $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = c'$, ou seja, $c' = 23$. Assim, a resposta à questão inicial é $2x + 3y = 23$.

13. Desigualdades lineares

Na seção 12, estabelecemos que o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem uma equação da forma $ax + by = c$ (isto é, a linha de nível c da função $\varphi(x, y) = ax + by$) é uma reta do plano. Nesta seção, consideraremos inequações da forma $ax + by \leq c$.

O conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem uma tal inequação é a união das linhas de nível menor do que ou igual a c relativamente a φ. Essas linhas de nível são paralelas entre si e sua união é um dos semi-planos determinados pela reta de equação $ax + by = c$.

As linhas de nível de φ são perpendiculares à reta que passa pela origem e pelo ponto $P = (a, b)$. Observamos que $\varphi(0, 0) = 0$ e $\varphi(a, b) = a^2 + b^2 > 0$. Isto significa que o sentido de percurso da origem para o ponto $P(a, b)$ indica o sentido de crescimento dos níveis de φ. Logo, os semi-planos correspondentes às inequações $ax + by \geq c$ e $ax + by \leq c$ são os indicados na figura 13.1.

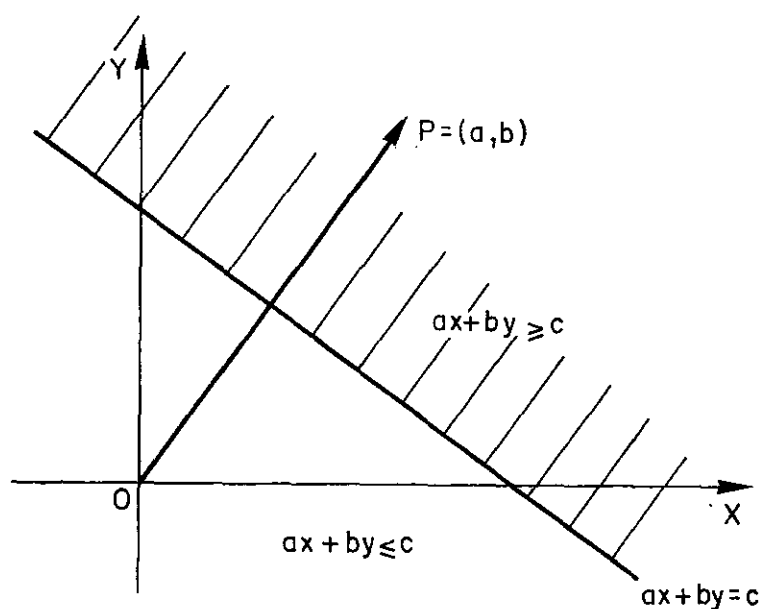



Fig. 13.1 - Os semi-planos $ax + by \leq c$ **e** $ax + by \geq c$.

Alternativamente, a determinação de qual dos dois semi-planos determinados pela reta $ax + by = c$ corresponde às soluções de $ax + by \geq c$

pode ser feita simplesmente testando se um dado ponto (x_0, y_0) não pertencente à reta satisfaz à inequação. É comum, sempre que possível, empregar a origem para esta finalidade. No exemplo da figura 13.1 (em que a, b e c são positivos) teríamos $\varphi(0,0) = 0 < c$, o que indica que as soluções de $ax + by \leq c$ estão no semi-plano que contém a origem.

Consideremos, agora, sistemas de desigualdades lineares, da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \vdots \\ a_mx + b_my \leq c_m \end{cases}$$

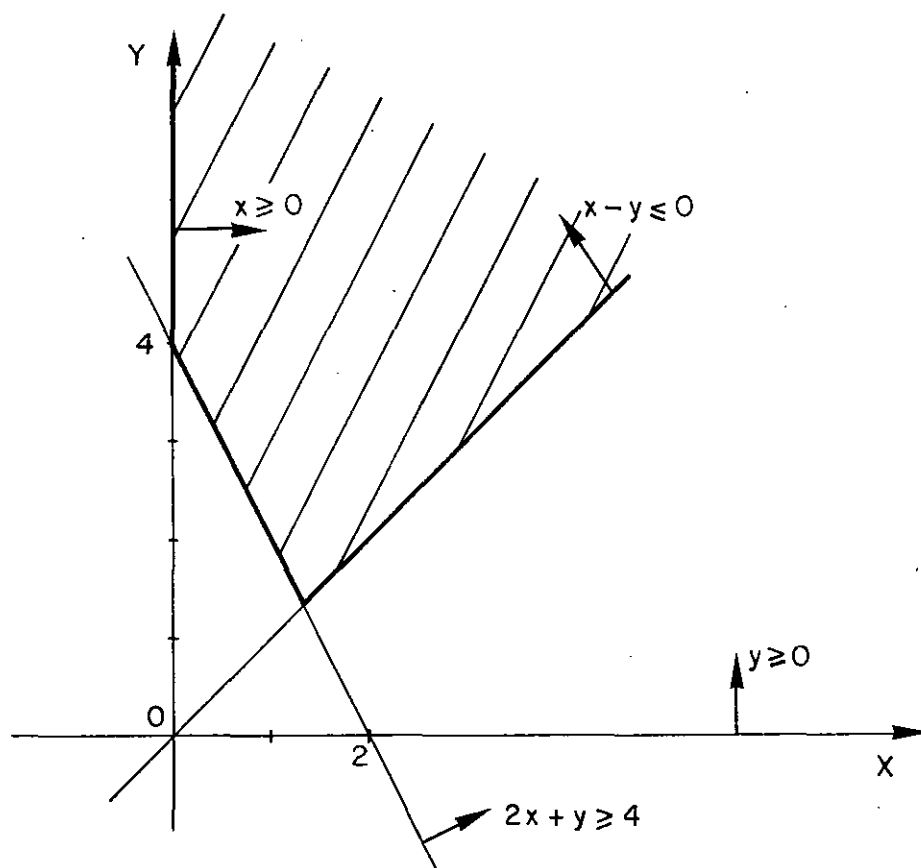



Fig. 13.2 - O gráfico de um sistema de desigualdades lineares.

O conjunto de soluções de um sistema deste tipo é a interseção dos m semi-planos correspondentes às m inequações; é uma região convexa R, que pode ou não ser limitada. A figura 13.2 ilustra o conjunto de

soluções do sistema

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Note que a desigualdade $y \geq 0$ é redundante: poderia ter sido removida do sistema sem alterar o conjunto de soluções.

Sistemas de desigualdades lineares são muitas vezes empregados para modelar (isto é, traduzir matematicamente) situações práticas.

De especial interesse são os problemas em que se deseja selecionar, entre as soluções de um sistema de desigualdades lineares, aquelas que maximizam uma certa função linear. Problemas de enorme interesse prático podem ser expressos nesta forma. O estudo de técnicas eficientes para resolver tais problemas (que podem, na prática, envolver milhares de variáveis e inequações) é o objeto de estudo da Programação Linear.

O exemplo a seguir é um problema de Programação Linear. Convenientemente, o problema envolve apenas duas variáveis, o que nos permite resolvê-lo usando os gráficos de desigualdades lineares vistos nesta seção.

Exemplo. Uma fábrica de rações para animais produz rações de dois tipos, para cães e para gatos, obtidos mediante a mistura de três ingredientes básicos: carne desidratada, farinha de milho e farinha de soja. A tabela abaixo indica as quantidades de ingredientes em um pacote de cada tipo de ração

Ração para	Carne desidr.	f. de milho	f. de soja
Cães	3kg	1kg	1kg
Gatos	2kg	2kg	—

Para a próxima semana de produção, estão disponíveis $1200kg$ de carne desidratada, $800kg$ de farinha de milho e $300kg$ de farinha de soja. O lucro é de Cr\$ $400,00$ em cada pacote de ração, para cães ou para gatos. A fábrica deseja decidir quantos pacotes produzir de cada tipo de ração de modo a maximizar o lucro.

Esta situação pode ser formulada matematicamente como um problema de Programação Linear. Sejam x e y o número de pacotes de ração para cães e gatos, respectivamente, a serem produzidos durante a semana. As limitações nas quantidades disponíveis dos ingredientes impõem

restrições expressas por desigualdades lineares a serem satisfeitas por x e y. As seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$3x + 2y \leq 1200 \qquad \text{(carne desidratada)}$$
$$x + 2y \leq 800 \qquad \text{(farinha de milho)}$$
$$x \leq 300 \qquad \text{(farinha de soja)}$$

Além disto, deve-se ter $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Cada uma das cinco desigualdades acima corresponde a um semi-plano. A interseção desses cinco semi-planos é a região convexa R representada na figura 13.3. R é o conjunto de todas as soluções *viáveis* (ou possíveis) para o problema. Por exemplo, o ponto $(100, 100)$ está em R, o que indica que a fábrica pode produzir 100 pacotes de cada tipo de ração sem violar qualquer uma das cinco restrições.

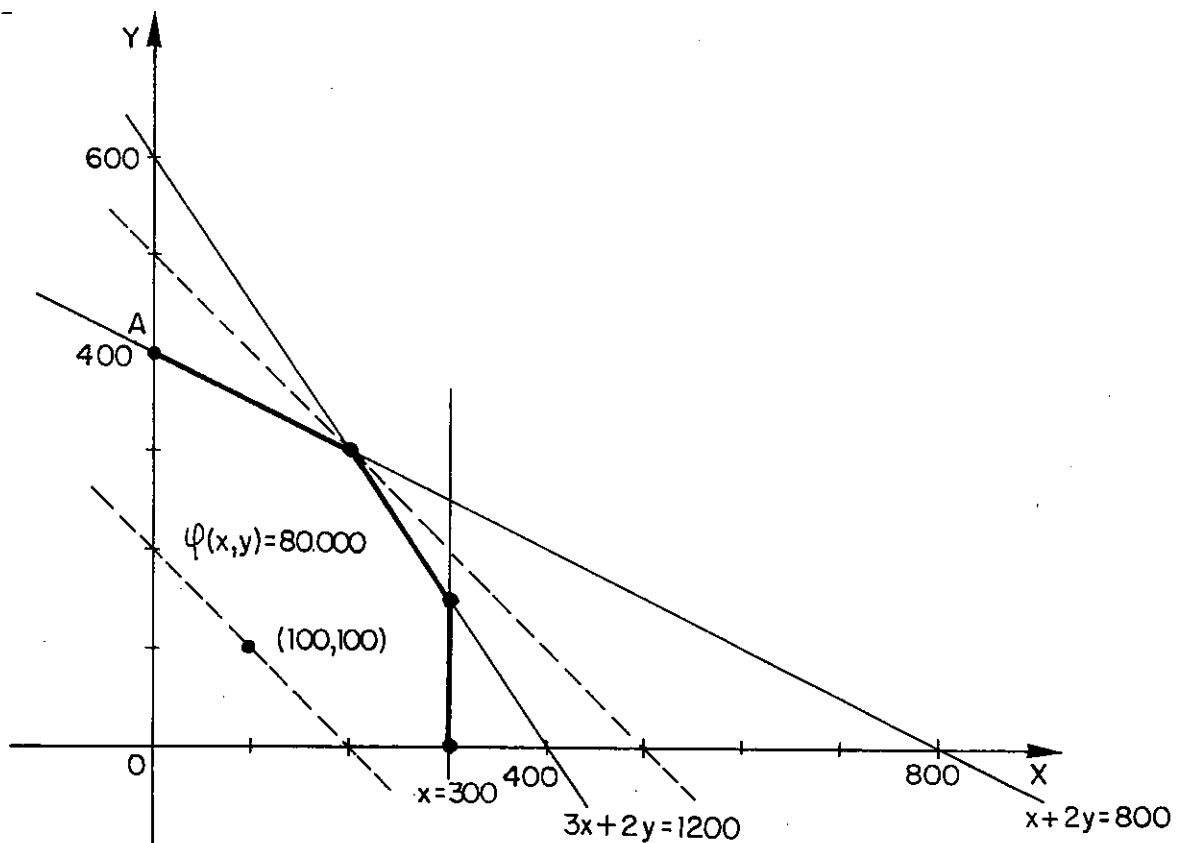



Fig. 13.3 - Um problema de programação linear.

O interesse da fábrica, porém, é maximizar a função *objetivo* $\varphi(x, y) = 400x + 400y$. O ponto $(100, 100)$ tem nível 80.000 em relação a φ; a linha de nível correspondente está representada na figura.

É claro que $(100, 100)$ não é a melhor solução possível para o problema, já que há outros pontos de R situados em linhas de nível mais alto de φ. Para obter a solução do problema a idéia é justamente tomar a linha de nível mais alto de φ que ainda contenha pelo menos um ponto de R. Tal linha de nível é a que passa pelo ponto B de interseção das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 800$. De fato, a inclinação das linhas de nível de φ é igual a -1; as inclinações das retas $3x + 2y = 1200$ e $x + 2y = 500$ são $-3/2$ e $-1/2$, respectivamente. Como $-3/2 < -1 < -1/2$, a posição relativa das três retas é a indicada na figura 13.3, o que mostra que a linha de nível máximo de φ que contém pontos de R passa por A. O ponto A é obtido resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1200 \\ x + 2y = 800 \end{cases}$$

que fornece $x = 200$ e $y = 300$.

Logo, a estratégia ótima para a fábrica é produzir 200 pacotes de ração para cães e 300 de ração para gatos, o que traz um lucro de Cr$ 200.000,00. Notamos que as quantidades disponíveis de farinha de milho e carne desidratada são inteiramente utilizadas, e que há uma sobra de farinha de soja.

É possível tirar uma conclusão geral importante a respeito de problemas de Programação Linear em 2 variáveis, a partir deste exemplo.

Um ponto interior à região viável do problema jamais poderá ser uma solução ótima, já que sempre haverá uma linha de nível superior de φ contendo outros pontos de R. Via de regra, o problema terá uma única solução ótima, correspondente a um dos vértices de R.

É possível, porém, que todos os pontos de um dos lados de R sejam soluções ótimas. Caso a função objetivo no exemplo fosse, $\varphi(x, y) = 300x + 200y$, suas linhas de nível seriam paralelas à reta $3x + 2y = 1200$ e, em conseqüência, todos os pontos do segmento BC seriam soluções ótimas.

14. Retas paralelas e retas coincidentes

Quando se representa uma reta sob a forma $y = ax + b$ (gráfico de uma função afim) isto exclui as retas verticais mas, em compensação, os coeficientes a e b são univocamente determinados. Por outro lado, a representação como linha de nível $ax + by = c$ inclui as retas verticais $(ax + 0 \cdot y = c)$ mas tem o inconveniente de que a mesma reta pode ser representada por mais de uma equação. Por exemplo $x - y = 0$ e $2x - 2y = 0$ são diferentes equações para representar a diagonal do plano. Vamos estudar este ponto com algum detalhe aqui. Lembremos que nossas funções lineares $\varphi(x, y) = ax + by$ não são identicamente nulas, isto é, a e b não são ambos iguais a zero.

Consideremos então as funções lineares $\varphi(x, y) = ax + by$ e $\psi(x, y) = a'x + b'y$. As seguintes afirmações sobre elas podem ser verdadeiras ou não:

(1) *Alguma linha de nível $ax + by = c$ é paralela a, ou coincide com, uma linha de nível $a'x + b'y = c'$.*

(2) $ab' - ba' = 0$.

(3) *Existe um número real k* (necessariamente $\neq 0$) *tal que $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$.*

Teorema 1. *As afirmações (1), (2) e (3) são equivalentes, ou seja, uma delas é verdadeira se, e somente se, as outras duas são.*

Demonstração: Provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1).
Prova de que (1) $\Rightarrow$ (2). Se alguma linha de nível de φ é paralela ou coincidente com alguma linha de nível de ψ então todas são, já que as linhas de nível de φ (bem como as de ψ) são paralelas entre si. Em particular, a linha de nível zero $ax+by = 0$ coincide com $a'x+b'y = 0$. (Estas linhas não podem ser paralelas porque têm a origem em comum.) Então o ponto $(b', -a')$, que está no nível zero de ψ, está também no nível zero de φ, isto é, tem-se $ab' - ba' = 0$. Portanto, admitindo (1) como verdadeira provamos (2).

Prova de que (2) $\Rightarrow$ (3). Suponhamos que $ab' - ba' = 0$. Há 3 casos a considerar. Primeiro caso: $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então de $ab' - ba' = 0$ segue-se $a'/a = b'/b$. Chamando k este quociente, temos $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$. Segundo caso: $a = 0$, $b \neq 0$. Então $ab' = 0$, logo $ba' = 0$ e daí $a' = 0$, logo $b' \neq 0$. Tomamos $k = b'/b$ e temos $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$. Terceiro caso: $a \neq 0, b = 0$. (Mesmo argumento do segundo caso.)

Prova de que (3) $\Rightarrow$ (1). De $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$ concluimos que $k \neq 0$ e daí se vê que

$$ax + by = 0 \Longleftrightarrow kax + k \cdot by = 0 \Longleftrightarrow a'x + b'y = 0$$

portanto as linhas de nível zero das funções lineares φ e ψ coincidem. Como as demais linhas de nível são paralelas a esta, segue-se que uma linha de nível de φ e outra de ψ, ou são paralelas ou coincidem.

Corolário 1. *As retas* $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ *coincidem se, e somente se, existe* $k \neq 0$ *tal que* $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ e $c' = k \cdot c$.

Se as retas dadas coincidem, segue-se do Teorema 1 que existe $k \neq 0$ tal que $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$. Além disso, tomando um ponto (x_0, y_0) nessa reta, temos

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = kax_0 + kby_0 = k(ax_0 + by_0) = kc,$$

portanto $c' = k \cdot c$. A recíproca é evidente.

Corolário 2. *As retas* $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ *são paralelas se, e somente se, existe* $k \neq 0$ *tal que* $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ e $c' \neq k \cdot c$.

Se as retas dadas são paralelas, pelo Teorema 1 podemos achar $k \neq 0$ tal que $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$. Além disso, se tomarmos um ponto (x_0, y_0) na reta $ax + by = c$, ele *não* estará na reta $a'x + b'y = c'$. Portanto

$$c' \neq a'x_0 + b'y_0 = kax_0 + kby_0 = k(ax_0 + by_0) = k \cdot c,$$

ou seja, $c' \neq k \cdot c$. A recíproca é evidente.

Outras formulações desses corolários são:

Corolário 1'. *As retas* $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ *coincidem se, e somente se,* $ab' - ba' = ac' - ca' = bc' - cb' = 0$.

Corolário 2'. *As retas* $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ *são paralelas se, e somente se,* $ab' - ba' = 0$ *mas* $ac' - ca' \neq 0$ *e* $bc' - cb' \neq 0$.

Com efeito, se as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ coincidem então, pelo Corolário 1, temos $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$ para algum $k \neq 0$. Em seguida, usando que (3) $\Rightarrow$ (2) no Teorema 1, obtemos $ab' - ba' = 0$. Finalmente, aplicando o mesmo resultado às retas $bx + cy = 0$ e $b'x + c'y = 0$ obtemos $bc' - cb' = 0$. Também a conclusão $ac' - ca' = 0$ resulta da implicação (3) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 1, aplicado às retas $ax + cy = 0$ e $a'x + c'y = 0$, já que sabemos que $c' = kc$ e $a' = k \cdot a$.

O Corolário 2' se prova da mesma forma.

Em termos da representação de uma reta como linha de nível, o problema de achar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é paralela à reta $ax + by = c$ se resolve observando que o nível do ponto P relativamente à função linear $\varphi(x, y) = ax + by$ é $ax_0 + by_0$. A reta procurada é a linha de nível de φ que passa pelo ponto P, logo tem a equação

$$ax + by = ax_0 + by_0, \quad \text{ou seja,} \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Analogamente, a reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ e é perpendicular à reta $ax + by = c$ é a linha de nível da função $\psi(x, y) = -bx + ay$ que contém P, logo sua equação é

$$-bx + ay = -bx_0 + ay_0, \quad \text{ou seja,} \quad -b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0.$$

Exemplo: As retas $6x + 3y = 9$ e $4x + 2y = 7$ são paralelas porque $6 \times 2 = 3 \times 4$ mas $3 \times 7 \neq 9 \times 2$, Por outro lado, as retas $6x + 3y = 9$ e $4x + 2y = 6$ coincidem porque $6 \times 2 = 3 \times 4$ e $3 \times 6 = 9 \times 2$. Visto de outro modo, as duas primeiras retas são paralelas porque, multiplicando-se a equação $6x + 3y = 9$ por $2/3$ obtém-se $4x + 2y = 6$, em vez de $4x + 2y = 7$, que é a equação da segunda reta. Pelo mesmo motivo é que as retas $6x + 3y = 9$ e $4x + 2y = 6$ coincidem.

15. Distância de um ponto a uma reta

Comecemos com o problema de calcular a distância entre duas retas paralelas, as quais podem ser tomadas como linhas de nível $ax + by = c$ e $ax + by = c'$ da mesma função linear $\varphi(x, y) = ax + by$.

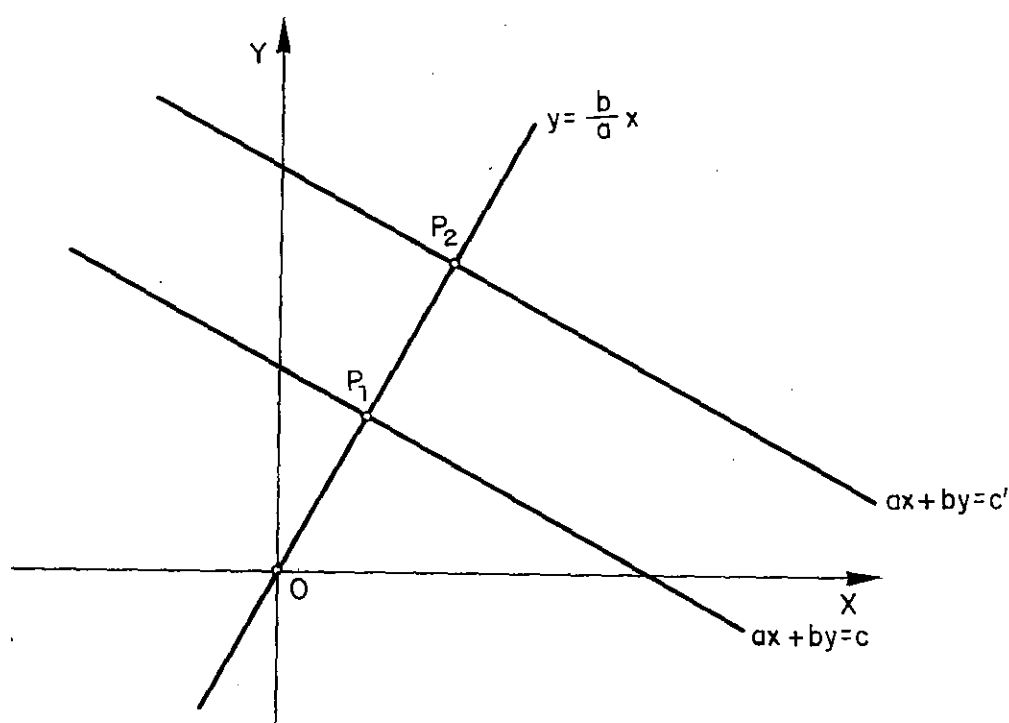



Fig. 15.1 - Distância entre 2 retas paralelas.

A distância procurada é $d(P_1, P_2)$, onde $P_1 = (x_1, (b/a)x_1)$ e $P_2 = (x_2, (b/a)x_2)$ são os pontos de interseção das retas dadas com sua perpendicular comum $y = (b/a)x$. Temos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{b}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = |x_1 - x_2| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a|}.$$

Por outro lado, como P_1 e P_2 pertencem às retas dadas, temos:

$$ax_1 + \frac{b^2}{a}x_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + \frac{b^2}{a}x_2 = c'.$$

Subtraindo estas igualdades, vem

$$a(x_1 - x_2) + \frac{b^2}{a}(x_1 - x_2) = c - c',$$

ou seja

$$(x_1 - x_2)\frac{a^2 + b^2}{a} = c - c',$$

donde

$$|x_1 - x_2| = \frac{|c - c'|}{a^2 + b^2} \cdot |a|.$$

Entrando com este valor na expressão da distância $\mathrm{d}(P_1, P_2)$, obtemos

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esta é a expressão da distância entre as retas $ax+by = c$ e $ax+by = c'$.

Sabemos que a equação $ax + by = c$ não é a única a exprimir uma dada reta r como linha de nível de uma função linear, pois os coeficientes a, b e c podem ser multiplicados pela mesma constante k. Entretanto, escolhendo k de forma adequada, podemos (se for conveniente) sempre supor que $a^2 + b^2 = 1$. Por exemplo, a reta $3x+4y = 10$ é a mesma que $(3/5)x+(4/5)y = 2$, e agora $(3/5)^2+(4/5)^2 = 1$. (O truque é dividir os coeficientes a, b e c por $\sqrt{a^2 + b^2}$.) Quando se tem $a^2 + b^2 = 1$, a fórmula anterior diz que a distância entre as linhas de nível $ax + by = c$ e $ax + by = c'$ é simplesmente $|c - c'|$.

A distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by = c$ obtém-se como caso particular da fórmula anterior, simplesmente observando que P está no nível $ax_0 + by_0$ da função $\varphi(x, y) = ax + by$. A distância do ponto P à reta r cuja equação é $ax + by = c$ é, portanto, a distância entre as linhas de nível c e $c' = ax_0 + by_0$, ou seja:

$$\mathrm{d}(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

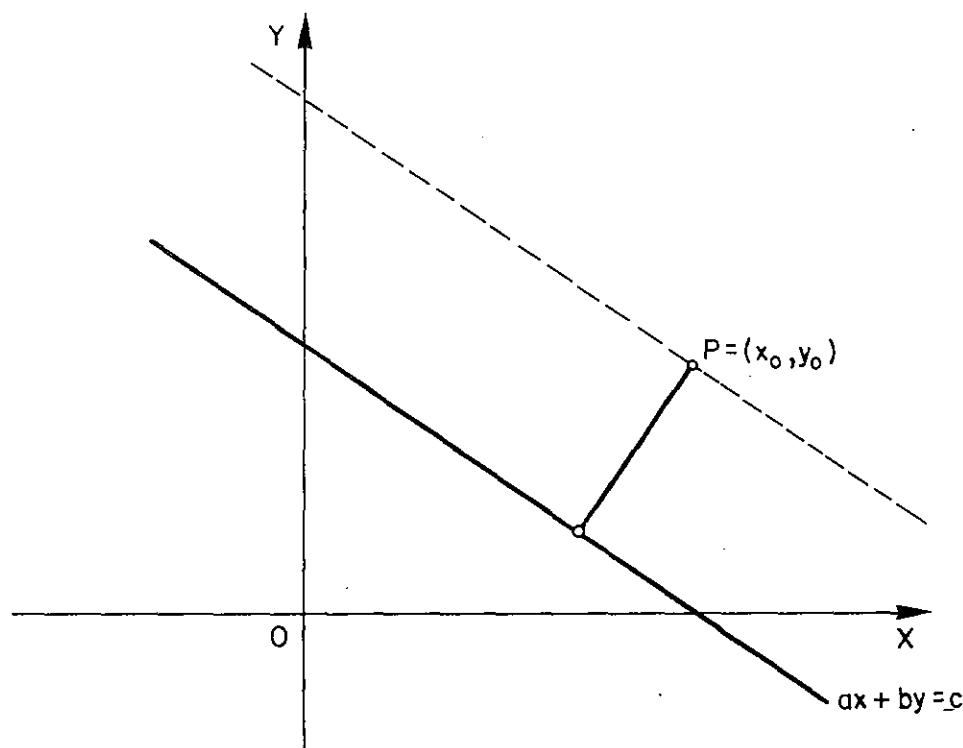



Fig. 15.2 - Distância de um ponto a uma reta.

Exemplo 1. A distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $y = x$ (diagonal do plano) é $|x_0 - y_0|/\sqrt{2}$, enquanto a distância do mesmo ponto à reta $y = -x$ (perpendicular à diagonal) é $|x_0 + y_0|/\sqrt{2}$. Observe que o sinal da diferença $y_0 - x_0$ é positivo quando o ponto (x_0, y_0) está acima da reta $y = x$ e negativo abaixo. Analogamente, a soma $x_0 + y_0$ é positiva quando o ponto (x_0, y_0) está acima da reta $y = -x$ e negativa quando está abaixo.

Exemplo 2. (Equações das bissetrizes dos ângulos formados por 2 retas.) Sejam r e s retas de equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$. A união das duas bissetrizes dos ângulos formados por r e s é o conjunto dos pontos equidistantes de r e s.

Logo, as bissetrizes são representadas pela equação

$$\frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y - c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \qquad (*)$$

Um ponto (x, y) satisfaz a $(*)$ se e somente se satisfaz a uma das

seguintes equações:

$$\frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a'x + b'y - c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}$$

ou

$$\frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a'x + b'y - c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.$$

Cada uma destas 2 equações representa uma das retas bissetrizes.

Como sabemos, não há perda de generalidade em admitir que $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$. Então as equações das bissetrizes assumem o aspecto mais simples:

$$(a - a')x + (b - b')y = c - c'$$
$$(a + a')x + (b + b')y = c - c'.$$

Vê-se que

$$(a - a')(a + a') + (b - b')(b + b') = a^2 - (a')^2 + b^2 - (b')^2 = 1 - 1 = 0.$$

Portanto as duas bissetrizes são perpendiculares. Isto comprova algebricamente um resultado conhecido da Geometria Elementar.

16. Sistemas lineares com duas incógnitas

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (S)$$

é o problema que consiste em achar números x, y que cumpram simultaneamente as duas condições acima. Uma *solução* do sistema (S) é um par (x, y) para os quais as igualdades (S) são satisfeitas. Procurar as soluções de (S) equivale a tentar achar um ponto do plano que esteja simultaneamente nas retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$.

Do ponto de vista geométrico, o sistema (S) tem uma única solução quando as retas dadas são concorrentes, nenhuma solução se elas são paralelas e uma infinidade de soluções quando essas retas coincidem. Nossa discussão anterior sobre retas paralelas e coincidentes nos leva às conclusões que se seguem.

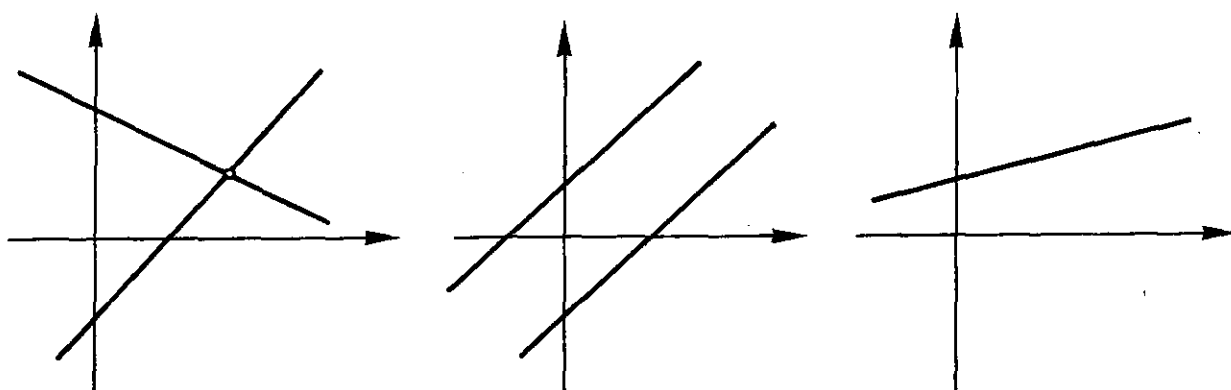



Fig. 16.1 - As três possibilidades para um sistema de duas equações com duas incógnitas, visto geometricamente.

Do ponto de vista algébrico, o sistema (S) tem uma única solução (é *determinado*) se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$. Neste caso, a solução (x, y) é dada explicitamente pelas expressões:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ainda do ponto de vista algébrico, o sistema (S) não possui solução quando se tem $ab' - ba' = 0$ e $cb' - bc' \neq 0$ (ou, o que é o mesmo, $ac' - ca' \neq 0$). Neste caso, diz-se que o sistema é *impossível*, ou *incompatível*. Isto equivale (multiplicando a primeira equação por um k conveniente) a se ter um sistema do tipo

$$(S')\begin{cases} a'x + b'y = kc \\ a'x + b'y = c', \end{cases} \qquad (S')$$

onde os primeiros membros das equações são iguais mas $c' \neq kc$, isto é, os segundos membros são diferentes. Evidentemente não há valores de x e y que cumpram essas condições.

Finalmente, o sistema (S) admite uma infinidade de soluções quando

$$ab' - ba' = ac' - ca' = bc' - cb' = 0,$$

o que equivale a dizer que, para um certo $k \neq 0$, tem-se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$. Isto significa que as 2 equações de (S) são, na realidade, uma só: a segunda foi obtida da primeira multiplicando-a por k.

A seguir, algumas palavras sobre sistemas com mais de duas equações lineares a duas incógnitas. Por exemplo, três equações como

$$(T)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c''. \end{cases} \qquad (T)$$

Geometricamente, uma solução do sistema (T) é um ponto que pertença simultaneamente às 3 retas que essas equações representam. Evidentemente, 3 retas no plano, mesmo quando nenhuma delas é paralela a uma outra, podem não ter um ponto em comum. (Podemos até mesmo dizer que este é o caso mais freqüente.) Por simplicidade, suponhamos que no sistema (T) não haja retas paralelas nem coincidentes. (No primeiro caso (T) seria incompatível e o segundo caso reduz-se ao sistema (S) já estudado.) Então, pelo fato de as 2 primeiras retas serem concorrentes, temos $ab' - ba' \neq 0$. Portanto o sistema

$$\begin{cases} a \cdot m + a'n = a'' \\ b \cdot m + b'n = b'' \end{cases}$$

possui uma solução única (m, n). A questão agora é saber se temos também $c'' = c \cdot m + c' \cdot n$ (com estes mesmos m e n). Se esta condição

for satisfeita, uma substituição direta, no sistema (T), de a'' por $am+a'n$, b' por $bm+b'n$ e c'' por $cm+c'n$ mostra que toda solução (x,y) das duas primeiras equações é também solução da terceira.

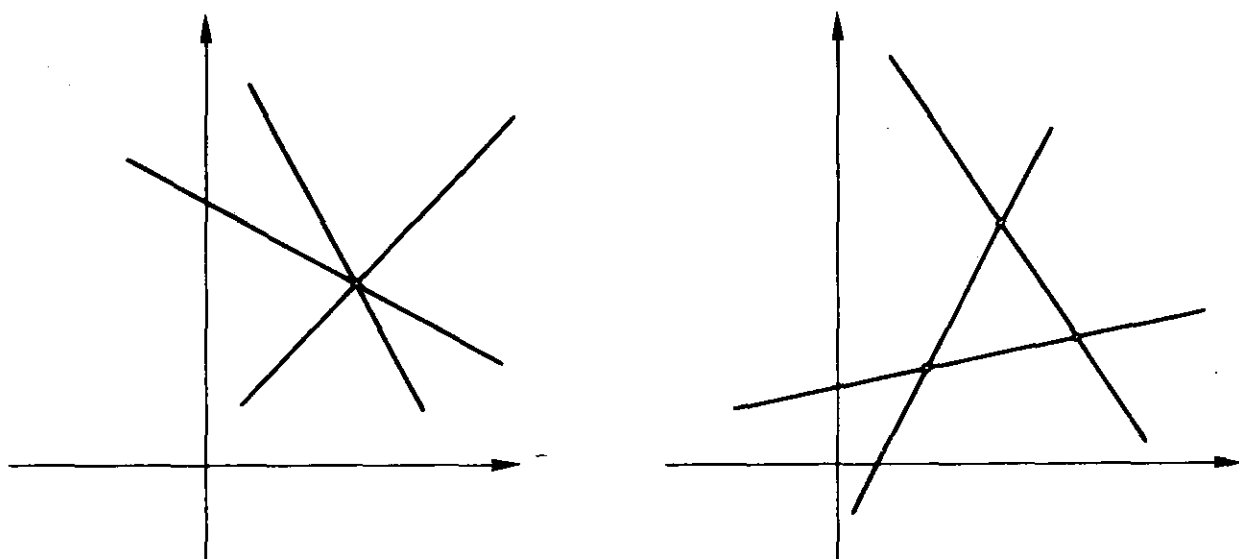



Fig. 16.2

Reciprocamente, se o sistema (T) admite a solução (x_0, y_0) e valem

$$a'' = am + a'n, \quad b'' = bm + b'n$$

então

$$\begin{aligned} c'' = a''x_0 + b''y_0 &= (am + a'n)x_0 + (bm + b'n)y_0 = \\ &= (ax_0 + by_0)m + (a'x_0 + b'y_0)n = cm + c'n. \end{aligned}$$

Conclusão: Quando as três retas do sistema (T) são duas a duas concorrentes existem sempre números m, n tais que $a'' = am + a'n$, $b'' = bm + b'n$. O sistema (T) admite uma (única) solução se, e somente se, tem-se $c'' = cm + c'n$ (com os mesmos valores de m e n).

O caso em que se tem mais de três retas reduz-se a este: para cada reta além das duas primeiras, com equação, digamos, $\bar{a}x + \bar{b}y = \bar{c}$, existem $r, s \in \mathrm{R}$ tais que $\bar{a} = ra + sa'$, $\bar{b} = rb + sb'$ e então, a condição para que o sistema seja compatível é que se tenha também $\bar{c} = rc + sc'$.

Antes de encerrar esta seção, faremos alguns comentários a respeito dos métodos de resolução de um sistema com 2 incógnitas.

O processo mais eficiente é o de *eliminação*, em que se adicionam múltiplos apropriados de cada equação de modo a obter uma equação em que o coeficiente de uma das variáveis seja nulo (o que permite a determinação imediata da outra variável). O mesmo processo, essencialmente, é usado para resolver sistemas com mais de 2 incógnitas.

A forma correta de encarar este processo consiste em vê-lo como produzindo uma seqüência de sistemas equivalentes, isto é, que possuem exatamente o mesmo conjunto-solução do sistema original. O processo termina quando a solução do sistema obtido pode ser obtida de forma trivial.

A propriedade fundamental, que serve como base para a obtenção dos sistemas equivalentes, é a seguinte:

Ao se substituir uma equação de um sistema de equações lineares pela soma de um múltiplo não nulo desta equação com uma combinação linear das demais obtém-se um sistema equivalente.

Por exemplo, dado o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

o sistema obtido substituindo a segunda equação por m vezes a 1ª mais n vezes a 2ª (onde $n \neq 0$)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (am + a'n)x + (bm + b'n)y = cm + c'n \end{cases}$$

é equivalente ao sistema original.

(Se m e n são escolhidos de modo que $am + a'n$ seja igual a zero, o segundo sistema poderá ter sua solução obtida de forma trivial, já que a segunda equação determina o valor de y.)

De fato, dada uma solução (x_0, y_0) do sistema original, ela satisfaz ambas as equações do sistema modificado: a primeira equação já ocorria no sistema original, enquanto na segunda equação temos

$$\begin{aligned} &(am + a'n)x_0 + (bm + b'n)y_0 = \\ &\quad = m(ax_0 + by_0) + n(a'x_0 + b'y_0 = \\ &\quad = cm + c'n. \end{aligned}$$

Reciprocamente, toda solução do sistema modificado é também solução do sistema original, já que a $2^{\underline{a}}$ equação do sistema original pode ser obtida multiplicando a $2^{\underline{a}}$ equação do sistema modificado por $1/n$ e subtraindo a $1^{\underline{a}}$ equação multiplicada por m/n.

Geometricamente, a passagem do sistema original para o modificado significa substituir uma das retas por uma outra, mantendo o conjunto-solução. No caso de um sistema correspondente a duas retas concorrentes, uma das retas é substituída por outra, ainda contendo o ponto de interseção original.

Exemplo 1. Ao resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1, \end{cases}$$

poderíamos substituir a $2^{\underline{a}}$ equação pela soma dela com a $1^{\underline{a}}$, obtendo

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x = 5 \end{cases}$$

Em termos geométricos, isto equivale à transformação representada na figura 16.3. Note que o ponto de interseção é mantido.

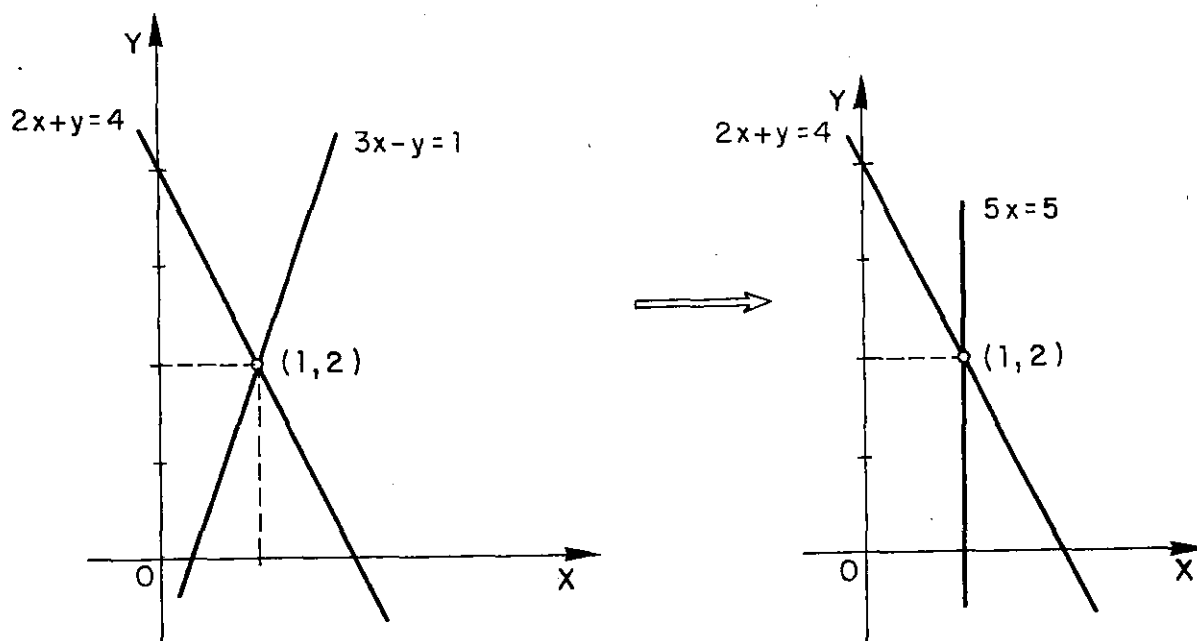



Fig. 16.3 - Resolvendo um sistema de equações lineares.

Como vimos nos parágrafos precedentes, dadas duas retas concorren-

tes r e s, de equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$, a equação

$$m(ax + by - c) + n(a'x + b'y - c') = 0 \qquad (*)$$

(onde m e n são reais não ambos nulos) representa uma terceira reta t, passando pelo ponto de interseção de r e s. A equação $(*)$ é chamada de equação do *feixe de retas* determinado por r e s.

17. Equações paramétricas

Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ funções reais da variável real t, cujo domínio é o intervalo $I \subset \mathbb{R}$. As equações

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

permitem associar a cada valor de t no intervalo I o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ do plano. Imaginando t como o tempo, essas equações descrevem o movimento de um ponto no plano: em cada instante t o ponto ocupa uma posição bem determinada (x, y).

O conjunto L de todos os pontos $(f(t), g(t))$, obtido quando t percorre o intervalo I, é uma linha plana, chamada a *trajetória* do movimento. As equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ são *equações paramétricas* da linha L. Movimentos diferentes podem ter a mesma trajetória, pois o mesmo caminho pode ser percorrido de maneiras diversas.

Exemplo 1. As equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$, descrevem o semi-círculo superior de centro na origem e raio igual a 1. (Veja Fig. 5.1) A trajetória do movimento definido pelas equações $x = \cos \pi t^2$, $y = \operatorname{sen} \pi t^2$, $-1 \leq t \leq 1$, é também o mesmo semi-círculo, porém agora percorrido de modo bem diferente. No primeiro caso, quando t vai de 0 a π o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ descreve o semi-círculo no sentido positivo, passando uma só vez por cada ponto. No segundo caso, quando t vai de -1 até 0, o valor πt^2 decresce continuamente de π a 0, logo o ponto $(\cos \pi t^2, \operatorname{sen} \pi t^2)$ descreve o semi-círculo no sentido negativo, passando por cada ponto uma só vez. Mas se t prosseguir crescendo de 0 a 1, vemos que πt^2 cresce de 0 a π e o ponto $(\cos \pi t^2, \operatorname{sen} \pi t^2)$ percorre de volta seu caminho inicial, passando novamente pelos mesmos pontos, até acabar onde começou, no ponto $(-1, 0)$. Assim as equações paramétricas $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi$ definem a mesma trajetória que as equações $x = \cos \pi t^2$, $y = \operatorname{sen} \pi t^2$, $-1 \leq t \leq 1$, porém os dois movimentos são bastante diferentes.

O movimento mais simples e natural cuja trajetória é uma linha reta

é o movimento retilíneo uniforme, cujas equações paramétricas são

$$x = a + ct, \quad y = b + dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que sua trajetória, ou seja, o conjunto dos pontos $(a + ct, b + dt)$ do plano, quando t assume todos os valores reais, é de fato uma linha reta.

Com efeito, se $c = 0$ então $x = a$ é constante e $y = b + dt$ assume todos os valores reais quando $t \in \mathbb{R}$. Logo, para $c = 0$, as equações acima descrevem uma reta vertical. Se, porém, temos $c \neq 0$ então a primeira equação nos dá $t = (x - a)/c$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos

$$y = b + \frac{d}{c}(x - a),$$

portanto as equações paramétricas $x = a + ct$, $y = b + dt$, $t \in \mathbb{R}$, descrevem a linha reta que passa pelo ponto (a, b) (no instante $t = 0$) e tem inclinação d/c. Se quisermos que nossa caracterização inclua também o caso $c = 0$, diremos que esta é a paralela tirada pelo ponto (a, b) à reta que passa pela origem e contém o ponto (c, d).

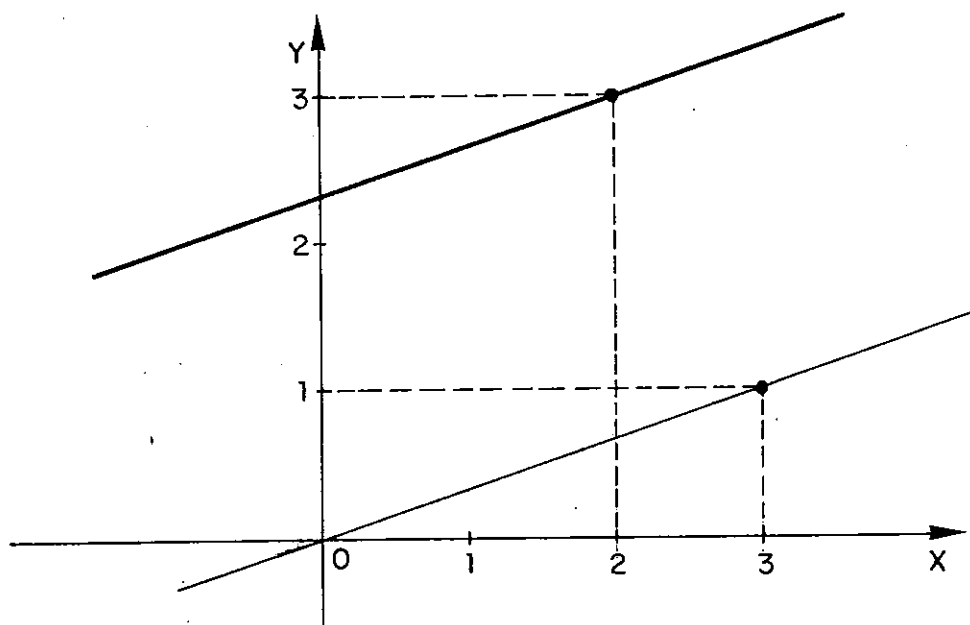



Fig. 17.1 - As equações paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = 3 + t$, descrevem a reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e tem inclinação $1/3$.

Dada uma constante arbitrária k, as equações paramétricas $x = a + kct$, $y = b + kdt$, $t \in \mathbb{R}$ representam a mesma reta L que as equações

$x = a + ct$, $y = b + dt$. Agora, porém, a "velocidade de percurso" é outra. Também se vê facilmente que, se tomarmos outro ponto (a', b') na reta L, as equações paramétricas $x = a' + ct$, $y = b' + dt$ ainda têm L como trajetória.

Como ilustração, obtenhamos as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Essa reta passa pelo ponto P_1 e tem inclinação igual a $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, caso se tenha $x_1 \neq x_2$. Logo suas equações paramétricas podem ser tomadas na forma

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) = (1 - t)x_1 + tx_2$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1) = (1 - t)y_1 + ty_2.$$

Se tivermos $x_1 = x_2$ a reta procurada será vertical. Note-se que as equações acima cobrem também este caso, pois $(1 - t)x_1 + tx_2 = x_1 = x_2$ caso se tenha $x_1 = x_2$.

Evidentemente poderíamos ter optado pelas equações paramétricas.

$$x = x_2 + t(x_1 - x_2) = (1 - t)x_2 + tx_1$$

$$y = y_2 + t(y_2 - y_1) = (1 - t)y_2 + ty_1,$$

que descrevem a mesma reta, porém no sentido contrário: no primeiro par de equações o movimento vai de P_1 para P_2 enquanto que no segundo, o ponto movimenta-se de P_2 para P_1.

A forma paramétrica de representação de uma curva aparece naturalmente na obtenção de certos lugares geométricos, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 2. Determinar o lugar geométrico dos pontos P do plano tais

que o ângulo $\widehat{APB}$ é reto, onde $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$ (figura 17.2)

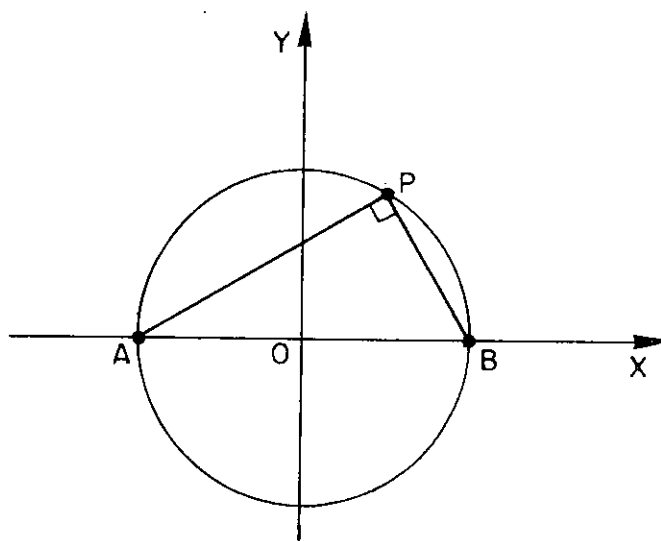



Fig. 17.2 - Um lugar geométrico.

É fácil ver que o lugar geométrico pedido é a circunferência de diâmetro AB, isto é, a circunferência de raio unitário centrada na origem. Utilizaremos este exemplo para obter uma forma paramétrica para a equação do círculo diferente das vistas no Exemplo 1.

Cada reta não-vertical que passa por A tem equação $y = t(x + 1)$, ou $tx - y = -t$, onde t é sua inclinação. As perpendiculares a esta reta têm inclinação $-1/t$ (para $t \neq 0$). Logo, a perpendicular conduzida por B tem equação $y = (-1/t)(x - 1)$, ou $x + ty = 1$.

As coordenadas do ponto P são, pois, obtidas através do sistema

$$\begin{cases} tx - y = -t \\ x + ty = 1 \end{cases}$$

e são dadas por $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ e $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

Para $t = 0$, as expressões fornecem $x = 1$ e $y = 0$, o que são as coordenadas de B. Desta forma, os pontos $P = (x, y)$, com

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1 + t^2} \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

são as extremidades das cordas conduzidas por A à circunferência unitária.

Logo, estas são as equações paramétricas da circunferência unitária, excluído o ponto A. Este ponto A, porém, pode ser obtido tomando o limite quando $t \to \infty$ das expressões das coordenadas.

É interessante comparar esta forma paramétrica com a obtida anteriormente:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

A figura 17.3 mostra a conexão entre estas duas formas de parametrizar a circunferência unitária.

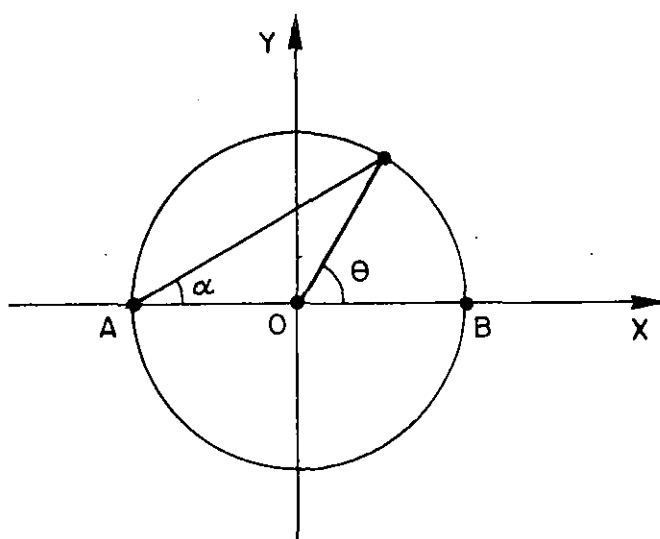



Fig. 17.3 - Parametrizações da circunferência.

O parâmetro t, da forma como foi introduzido neste exemplo, é a tangente do ângulo α, o qual é igual a $\theta/2$. As duas formas de representação estão portanto relacionadas através da expressão $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$. As identidades

$$x = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

$$y = \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

refletem resultados bem conhecidos da Trigonometria.

Exercícios da Primeira Parte

2.1 Defina a *distância orientada* $\rho(A,B)$ entre dois pontos A, B da reta orientada r pondo $\rho(A,B) = \mathrm{d}(A,B)$ se A estiver à esquerda de B e $\rho(A,B) = -\mathrm{d}(A,B)$ se A estiver à direita de B. Prove que se tem $\rho(A,B) + \rho(B,C) + \rho(C,A) = 0$ para quaisquer pontos A, B e C da reta r.

2.2 Sejam a e b respectivamente as coordenadas dos pontos A e B do eixo E. Determine a coordenada do ponto médio do segmento AB. Generalizando, obtenha as coordenadas dos $n-1$ pontos que dividem esse segmento em n partes iguais.

2.3 Sejam A, B e X pontos do eixo E, com coordenadas a, b e x respectivamente, sendo $a < x < b$. Diz-se que X divide o segmento AB em *média e extrema razão* quando

$$\frac{\mathrm{d}(A,X)}{\mathrm{d}(X,B)} = \frac{\mathrm{d}(A,B)}{\mathrm{d}(A,X)}.$$

Supondo que X divida AB em média e extrema razão, determine x em função de a e b.

2.4 Sejam a e b, com $a < b$, as coordenadas dos pontos A e B respectivamente, no eixo E. Prove que, para todo ponto X em E, com coordenada x, existe um único número real t tal que $x = (1-t)a + tb$. Tem-se $t < 0$ quando X está à esquerda de A, $t > 1$ quando x está à direita de B e $0 \leq t \leq 1$ quando X pertence ao segmento de reta AB. Neste último caso, $t = \mathrm{d}(A,X)/\,\mathrm{d}(A,B)$.

2.5 Sejam $s, t\colon E \to E$ respectivamente a simetria em torno do ponto A e uma translação do eixo E. Prove que, para todo X em E, tem-se $\mathrm{d}(X, s(X)) = 2 \cdot \mathrm{d}(X,A)$ enquanto $\mathrm{d}(X, t(X)) = |a|$, onde a é a constante associada à translação t.

2.6 Seja $f\colon E \to E$ uma isometria do eixo E, diferente da função identidade. Se f admitir algum ponto fixo então f é uma simetria e esse ponto fixo é único. Se f não tiver ponto fixo então é uma translação.

2.7 Prove que se s, s' são simetrias e t, t' são translações, então $s \circ s'$ e $t \circ t'$ são translações e $s \circ t$, $t \circ s$ são simetrias.

3.1 Diz-se que os pontos A e A' são *simétricos* em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento AA'. Ache o simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação à reta horizontal $y = b$ e em relação à reta vertical $x = a$.

3.2 Mostre que o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^3 + y^3 = 1$ contém pontos no primeiro, segundo e quarto quadrantes mas não no terceiro.

3.3 Mostre que o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^4 + y^4 = 1$ contém pontos nos quatro quadrantes, é limitado e é simétrico em relação a ambos os eixos. Determine os pontos de maior e menor ordenadas nesse conjunto.

3.4 Em cada um dos casos abaixo esboce o subconjunto do plano formado pelos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem as condições aí especificadas:

(a) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$;
(b) $|x - a| \leq r$ e $|y - b| \leq r$;
(c) $x \geq a$ e $y \geq b$;
(d) $y \geq x + 1$;
(e) $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$;
(f) $x + y \leq 1$.

3.5 Sejam $X = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$, $Y = \{(x, y); x^2 + y \leq 1\}$, $W = \{(x, y); xy = 2\}$ e $Z = \{(x, y); |x| + |y| = 1\}$. Esboce esses conjuntos. Prove algebricamente (sem usar as figuras) que $Z \subset X$, que W não possui pontos no segundo nem no quarto quadrantes e que a interseção de Y com o eixo das abcissas é o intervalo $[-1, 1]$ desse eixo.

3.6 Para todo número real $x \neq 0$, mostre que o segmento OP, onde $P = (x, x)$, forma ângulos iguais com os eixos coordenados. Conclua que os pontos $P = (x, x)$ estão todos sobre a mesma reta, chamada a *diagonal* do plano. A partir daí, deduza que o conjunto dos pontos $(x, x + 3)$, onde x varia entre os números reais, é uma reta paralela à diagonal.

3.7 Prove que o conjunto dos pontos $Q = (-x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, é uma reta, bissetriz do segundo e do quarto quadrantes.

3.8 Seja $P = (x, y)$ um ponto do segmento de reta P_1P_2, onde $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Se $x = (1-t)x_1 + tx_2$, prove que $0 \leq t \leq 1$ e $y = (1-t)y_1 + ty_2$. Reciprocamente, mostre que se x e y têm as expressões acima então $P = (x, y)$ pertence ao segmento de reta P_1P_2.

3.9 Para cada uma das equações a seguir, descreva o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a condição expressa por essa equação:

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
(b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;
(c) $3x^2 + 4x + 6 = 0$.

3.10 Use o fato de que cada lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois para provar que se tem

$$\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2}$$

sejam quais forem os números reais x, y, u e v. Dê também uma demonstração algébrica para a desigualdade acima.

3.11 Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, determine as coordenadas do ponto médio do segmento de reta AB. Mais geralmente, ache as coordenadas dos $n-1$ pontos que dividem o segmento AB em n partes iguais.

3.12 Diz-se que os pontos A e A' são *simétricos* em relação ao ponto O quando O é o ponto médio do segmento AA'. Conhecidas as coordenadas de A e O calcule as coordenadas de A'.

4.1 Qual o ponto da reta diagonal $y = x$ mais próximo do ponto $P = (a, b)$?

4.2 Sejam P e Q pontos distintos do plano. Considerando um sistema de eixos apropriado, prove que o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de P e Q é a perpendicular pelo ponto médio do segmento PQ.

4.3 Dados $x \neq y$, mostre que os pontos $P = (x, y)$, $Q = (x, x)$, $R = (y, x)$ e $S = (y, y)$ são vértices de um quadrado. Conclua daí que (y, x) é o simétrico do ponto (x, y) em relação à reta diagonal do plano.

4.4 Indicando com $P^* = (-y, x)$ o ponto obtido do ponto arbitrário $P = (x, y)$ pela rotação positiva de 90° em torno da origem, mostre que se tem $\mathrm{d}(P^*, Q^*) = \mathrm{d}(P, Q)$ para quaisquer pontos P, Q do plano.

4.5 Dados os números a, b e c, seja X o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Complete os quadrados e conclua que se $a^2 + b^2 - 4c > 0$ então X é uma circunferência. ["Completar o quadrado" é escrever $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - a^2/4$.]

4.6 Que acontece com o conjunto X do exercício anterior quando $a^2 + b^2 = 4c$ ou quando $a^2 + b^2 < 4c$?

4.7 Dados os pontos $A = (a, 0)$ e $B = (-a, 0)$, determine y de modo que o ponto $P = (0, y)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABP.

4.8 Ache as equações das circunferências que tangenciam o eixo vertical no ponto $O = (0, 0)$.

4.9 Para cada uma das condições abaixo, determine o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas cumprem aquela condição
(a) $x^2 + y^2 = x$;
(b) $x^2 + y^2 + y = 0$;
(c) $x^2 + y^2 + x + y = 0$;
(d) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$.

4.10 Dado o triângulo ABC, tome um sistema de eixos no qual as coordenadas dos vértices são $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$. Supondo que as medianas que partem dos vértices A e B são iguais, prove que os lados AC e BC são iguais, logo o triângulo é isósceles.

4.11 Sejam $A = (-r, 0)$ e $B = (r, 0)$. Use a recíproca do Teorema de Pitágoras para provar que, seja qual for o ponto $P = (x, y)$ da circunferência de centro O e raio r, o ângulo $\widehat{APB}$ é reto.

4.12 Seja X o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que a razão das distâncias de P aos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$ é igual a 2. Prove que X é uma circunferência. Generalize.

4.13 Ache os pontos de interseção da circunferência $x^2 + y^2 = 2$ com a hipérbole $xy = 1$. Idem da parábola $x^2 = 4y$ com a reta $x + y = 3$.

4.14 Prove que os pontos $P = (x, y)$, $Q = (w, z)$ e $O = (0, 0)$ são os vértices de um triângulo equilátero se, e somente se, $x^2 + y^2 = w^2 + z^2 = 2(xw + yz)$.

4.15 Reescreva o polinômio $x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 5y + 6$ sob a forma $w^2 - 5w + 6$ e conclua que a equação $x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 5y + 6 = 0$ representa um par de retas paralelas.

4.16 Qual o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas cumprem a condição $x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9 = 0$?

4.17 Obtenha a equação da circunferência passando pelos pontos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Idem pelos pontos $(1, 1)$, $(2, 1)$ e $(0, 0)$.

5.1 Se o ponto (x, y) pertence ao gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, mostre que o ponto $(-x - b/a, y)$ também pertence. Mostre que estes dois pontos são simétricos em relação a reta $x = -b/2a$.

5.2 Use o método de completar o quadrado (V. Exerc. 4.5) para provar que $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (4q - p^2)/4$ e, mais geralmente, quando $a \neq 0$, que

$$ax^2 + bx + c = a[(x + b/2a)^2 + (4ac - b^2)/4a^2].$$

Conclua daí que $(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ é o ponto de menor ordenada do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $a > 0$ e é o ponto de maior ordenada nesse gráfico quando $a < 0$.

5.3 Seja $y = ax^2 + bx + c$ a equação de uma curva relativamente ao sistema de eixos ortogonais OXY. Tome um novo sistema $O'X'Y'$, com origem no ponto $O' = (-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ e eixos paralelos, igualmente orientados, a OX e OY. Mostre que a equação da mesma curva no novo sistema é $y' = ax'^2$.

5.4 Determine a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é o conjunto

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)(xy - 1) = 0\}.$$

6.1 Qual a abcissa do ponto de interseção da reta $y = ax + b$ com eixo horizontal?

6.2 Qual a abcissa do ponto onde a reta de inclinação a, passando pelo ponto $P = (x_0, y_0)$, corta o eixo horizontal? Mesma pergunta para o eixo vertical.

6.3 Suponha que as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ tenham ambas inclinação diferente de 1. Que condições devem cumprir seus coeficientes a fim de que elas se encontrem sobre a diagonal $y = x$?

6.4 Dado um triângulo ABC, escolha os eixos de modo que $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$. Determine as coordenadas dos pontos médios dos lados desse triângulo. Obtenha as equações das medianas. Mostre que duas delas se intersectam no ponto $((a+b)/3, c/3)$ e verifique que este ponto pertence também à terceira mediana. Mostre que o ponto de interseção das medianas divide cada uma delas na razão 2:1.

6.5 Dada uma circunferência de raio r e um ponto P fora dela, situado à distância d do centro, tome um sistema de eixos coordenados cuja origem seja o centro da circunferência e no qual as coordenadas de P são $(d, 0)$. Mostre que as tangentes à circunferência traçadas pelo ponto P têm pontos de contacto (x, y) e (x', y'), onde $x = x' = r^2/d$ e $y' = -y$, com $y = (r/d)\sqrt{d^2 - r^2}$. Ache as equações dessas tangentes.

6.6 Aprende-se no Cálculo elementar que a inclinação da reta tangente no ponto (x, x^3) ao gráfico da função $f(x) = x^3$ é igual a $3x^2$. Use este fato para determinar os valores de a para os quais a equação $x^3 - x - a = 0$ tem uma, duas ou três raízes reais. (Lembre-se que as raízes dessa equação correspondem às interseções da reta $y = x + a$ com o gráfico de f.)

6.7 Qual a abcissa do ponto em que a tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto (x, x^3) corta o eixo horizontal?

7.1 Dados $A = (-1, 3)$, $B = (2, 2)$, $C = (-2, 2)$ e $D = (x, -1)$, atribua um valor para x de modo que o quadrilátero $ABDC$ tenha pelo menos um par de lados paralelos. Decida se o resultado foi um paralelogramo ou um trapézio.

7.2 Seja r uma reta do plano. Dados os números p e q, seja s o conjunto dos pontos $(x + p, y + q)$, onde (x, y) pertence a r. Prove que s é uma reta paralela a r.

7.3 Considere a faixa F, formada pelos pontos situados entre as retas paralelas $y = ax + b$ e $y = ax + b'$, com $b < b'$. Mostre que o ponto (x, y) pertence à faixa F se, e somente se, $b \leq y - ax \leq b'$.

7.4 Com a notação do exercício anterior, mostre que a reta $y = cx + d$ está contida na faixa F se, e somente se, $c = a$ e $b \leq d \leq b'$.

7.5 Prove que se as retas r e s não forem paralelas então, por maior que seja o número real positivo c, existem pontos (x, y) em r e (x, y') em s, com a mesma abcissa x, tais que $|y - y'| > c$.

8.1 Em que ponto corta o eixo das abcissas a paralela à reta $y = ax$ tirada pelo ponto (b, b)? (Suponha $a \neq 1$.)

8.2 Dado o triângulo ABC, com $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$ e $C = (0, 4)$, determine a equação da reta paralela à base BC que passa pelo ponto A.

8.3 Qual a equação da paralela à reta $y = -x$ que passa pelo ponto $(3, 3)$?

8.4 Dados os pontos $A = (1, 3)$, $B = (3, 5)$ e $C = (2, 6)$, determine a equação da reta paralela a BC que passa pelo ponto $D = (3/2, 9/2)$. Qual o ponto E de interseção dessa paralela com a reta AB?

9.1 Dados os pontos $A = (-2, 1)$, $B = (-1, 3)$ e $C = (3, 2)$, que condições devem cumprir x e y para que o ponto $P = (x, y)$ esteja no interior do ângulo $\widehat{BAC}$?

9.2 Com os dados do exercício anterior, que condições asseguram que o quadrilátero $ABPC$ seja convexo?

9.3 Sejam $A = (5, 6)$ e $B = (8, 9)$. Em que ponto a reta AB corta o eixo das abcissas?

9.4 Dados os pontos $A = (7, 8)$ e $B = (15, 16)$, diga se o ponto $C = (9/2, 5)$ está no interior, no exterior ou sobre o bordo do triângulo OAB. Mesma questão para o ponto $D = (10, 11)$.

9.5 Sejam $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (3, 4)$ e $D = (6, 4)$. Qual dos dois segmentos de reta AB e CD forma maior ângulo com o eixo horizontal?

9.6 Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$ pontos do plano com abcissas todas diferentes. Escreva $x_{21} = x_2 - x_1$, $y_{21} = y_2 - y_1$ etc. Prove que os segmentos de reta AB e CD são colineares se, e somente se, $x_{32}x_{43}y_{21} = x_{43} \cdot x_{32} \cdot y_{21} = x_{43} \cdot y_{32} \cdot x_{21} = y_{43} \cdot x_{32} \cdot x_{21}$

9.7 Com a notação do exercício anterior, prove que os segmentos AB e CD são paralelos se, e somente se, $x_{43} \cdot y_{21} = y_{43} \cdot x_{21}$ mas $y_{32} \cdot x_{21} \neq x_{32} \cdot y_{21}$.

9.8 Chama-se *tangente* a uma parábola a reta que não é paralela ao eixo e que tem apenas um ponto em comum com essa curva. Mostre que a tangente à parábola $y = ax^2$ passando pelo ponto $P = (x_0, ax_0^2)$ é a reta que liga esse ponto ao ponto $Q = (0, -ax_0^2)$.

10.1 Dados $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $P = (x_0, y_0)$, escreva a equação da reta que passa pelo ponto P e é perpendicular a AB.

10.2 O *simétrico* do ponto $P = (x, y)$ em relação à reta $y = ax$ é o ponto $P' = (x', y')$ tal que essa reta é a mediatriz do segmento PP'. Exprima a condição para que a reta $y = ax$ seja perpendicular ao segmento PP' e, em seguida, a condição para que o ponto médio de PP' esteja sobre essa reta. Use essas duas equações para obter as coordenadas x', y' do ponto P' em termos de a, x e y.

10.3 Seja S uma semi-circunferência de raio r e extremidades A e B. Escolha um sistema de eixos adequado, tome um ponto arbitrário $P = (x, y)$ sobre S e verifique que os segmentos AP e PB são perpendiculares, logo o ângulo $\widehat{APB}$ é reto.

10.4 Para provar, usando Geometria Analítica, que as três alturas de um triângulo ABC se encontram no mesmo ponto, chamado o *ortocentro* do triângulo, tome um sistema de eixos ortogonais onde $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$. Uma das alturas de ABC é o eixo OY. Obtenha as equações das outras alturas e mostre que elas passam pelo mesmo ponto de OY. Determine a ordenada desse ponto.

10.5 Ache os comprimentos das alturas do triângulo ABC, onde $A = (2, 0)$, $B = (3, 5)$ e $C = (-1, 2)$.

10.6 Dados os pontos $A = (a, b)$ e $B = (-a, -b)$, determine as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ de modo que o triângulo ABP seja equilátero. [Há duas soluções, (x, y) e $(-x, -y)$. Para obtê-las, observe que $y = -ax/b$, e escreva explicitamente a igualdade $d(P, A)^2 = d(A, B)^2$.]

10.7 Dados dois pontos quaisquer $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, determine as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ de modo que o triângulo ABP

seja equilátero. [Reduza ao exercício anterior considerando o triângulo $A'P'B'$ onde $A' = ((a-c)/2, (b-d)/2)$, $B' = ((c-a)/2, (d-b)/2)$ e $P' = (x - (a+c)/2, y - (b+d)/2)$.]

11.1 Duas linhas de diferentes níveis da mesma função podem ter pontos em comum?

11.2 Determine uma função cujas linhas de nível são as parábolas $y = x^2 + c$.

11.3 Quais são as linhas de nível da função $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$?

11.4 Qual a linha de nível zero da função $f(x, y) = y^3 - x^3 + x^2y - xy^2 + x - y$?

11.5 Quais são as linhas de nível da função $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy^2 - 3x^2y$?

11.6 Esboce as linhas de nível da função $f(x, y) = (x-1)^2 + y$.

11.7 Ache a curva de nível -1 da função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$.

12.1 Mostre que a equação da reta que corta o eixo horizontal no ponto de abcissa a e o eixo vertical no ponto de abcissa b, com a e b diferentes de zero, é $x/a + y/b = 1$.

12.2 Determine os pontos em que a reta de equação $ax + by = c$ intersecta os eixos.

12.3 Mostre que o conjunto dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 9x + 6y + 2 = 0$ é um par de retas paralelas.

12.4 Fatore o polinômio $x^2 - y^2 + 2y - 1$ e, a partir daí, identifique o conjunto dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $x^2 - y^2 + 2y = 1$.

12.5 Uma reta corta os eixos nos pontos $(6, 0)$ e $(0, 3)$. Outra nos pontos $(3, 0)$ e $(0, -6)$. Qual o ângulo entre essas retas?

12.6 Prove que a reta $ax + by = c$ não contém pontos do primeiro quadrante se, e somente se, a e b têm ambos sinais contrários ao sinal de c. Dê exemplos numéricos.

12.7 Mostre que a equação da reta tangente à circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ passando pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ dessa circunferência é $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.

12.8 Mostre que a equação da mediatriz do segmento AB, com $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ é $(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y = c$, onde $2c = (a_1 + b_1)(b_1 - a_1) + (a_2 + b_2)(b_2 - a_2)$.

13.1 Um conjunto C de pontos do plano é *convexo* se, dados dois pontos quaisquer P e Q pertencentes a C, o segmento de reta PQ está contido em C. Mostre que o conjunto de soluções de um sistema de desigualdades lineares é um conjunto convexo.

13.2 Esboçe o gráfico do conjunto de soluções de cada um dos sistemas de desigualdades lineares a seguir:

$$a) \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ -2x + y \geq 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \geq x \\ y \geq 2x - 2 \end{cases}$$

13.3 Esboçe o gráfico do conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano que satisfazem a desigualdade $|x| + |y| \leq 1$.

13.4 Resolva o seguinte programa linear: minimizar $x + 2y$, sujeito a

$$x + y \geq 1$$

$$-x + y \geq -1$$

$$x \geq 0, \ y \geq 0$$

13.5 No exercício anterior, o que ocorre se o objetivo for maximizar $x + 2y$, sujeito às mesmas restrições?

13.6 Uma pequena fábrica de copos produz copos comuns e copos de vinho. A fábrica possui uma máquina, com a qual automatiza parte do processo de produção. A produção de uma caixa de copos comuns requer 1 hora de uso da máquina e 1 hora adicional de trabalho manual de um operário. A produção de uma caixa de copos de vinho requer somente meia hora de uso da máquina; em compensação, são necessárias 2 horas adicionais de trabalho manual. Durante o período de uma semana, a

fábrica tem disponíveiss 80 horas de trabalho manual e 50 horas de uso da máquina. O lucro na venda de uma caixa de copos de vinho é Cr$ 5.000,00 e em cada caixa de copos comuns é Cr$ 4.000,00.

a) Qual deve ser a produção semanal de cada tipo de copo, de modo a maximizar o lucro?

b) Suponha que, repentinamente, há uma falta de copos de vinho no mercado, o que faz subir o preço de venda (e portanto o lucro) de cada caixa de copos de vinho. Qual é o lucro máximo por caixa de copos de vinha para que a solução encontrada em (a) continue ótima? Se o lucro exceder este valor, qual será a solução ótima?

13.7 Considere novamente o exemplo da seção 13. Sua formulação pressupõe que as quantidades de cada ingrediente disponíveis para a semana são fixas. Suponha agora, porém, que a fábrica, se assim o desejar, pode adquirir, no mercado, quantidades adicionais dos ingredientes básicos.

a) Suponha que a fábrica obtém Δ Kg adicionais de carne desidratada. Qual passa a ser a nova solução ótima? Qual é o acréscimo no faturamento da empresa?

b) Qual é o preço máximo que a fábrica deveria estar disposta a pagar por Kg adicional de carne desidratada?

c) Que preço a fábrica estaria disposta a pagar por Kg extra de farinha de soja?

13.8 Uma pessoa entusiasta por complexos multivitamínicos resolveu preparar seu próprio complexo, a partir de dois produtos (VITAMEX e VITAMIL) disponíveis no mercado (ambos sob a forma de pó).

A tabela abaixo fornece a quantidade de cada tipo de vitamina presente em cada grama de cada produto, bem como a dosagem mínima diária reconhecida pelos nutricionistas

	VITAMIL	VITAMEX	Dosagem mínima
Vitamina A	250 UI	500 UI	2500 UI
Vitamina D	100 UI	80 UI	400 UI
Vitamina E	4 UI	5 UI	30 UI
Vitamina C	6 mg	20 mg	60 mg
Vitamina B6	1 mg	—	2 mg
Vitamina B12	3 mg	—	5 mg

Cada grama de VITAMIL custa Cr$ 30,00, enquanto cada grama de VITAMEX custa Cr$ 20,00. Determina a quantidade de cada produto a ser ingerida diariamente, de modo a atender às necessidades nutricionais ao menor custo possível.

13.9 Esboçe o gráfico do conjunto de soluções de cada desigualdade a seguir:

a) $y \leq x^2$;
b) $x^2 + y^2 \geq 1$;
c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq 0$;
d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;
e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1$.

13.10 Defina cada uma das regiões do plano descritas a seguir por meio de uma desigualdade ou de um sistema de desigualdades.

a) O semi-plano abaixo da reta $2x + 3y - 6 = 0$;
b) A região que consiste do interior e dos lados do triângulo de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(4,0)$;
c) A porção do interior da circunferência de centro $(1,0)$ e reaio 1 situada acima do eixo y.

14.1 Use as condições dos Corolários 1, 1', 2 e 2' para mostrar que as retas definidas pelas equações à esquerda são paralelas enquanto que as retas definidas pelas equações à direita coincidem:

$$5x + 2y = 3 \qquad 2x - 3y = 1$$
$$-15x - 6y = 9 \qquad 10x - 15y = 5$$

14.2 Sejam φ, ψ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções lineares (não identicamente nulas). Prove que as linhas de nível de φ e ψ coincidem (mas não necessariamente os níveis das linhas) se, e somente se, existe k tal que $\psi = k \cdot \varphi$.

14.3 Ache a equação da reta que passa pelo ponto $P = (-1, -3)$ e é paralela à reta $2x - 3y = 1$.

14.4 Se as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ forem paralelas, prove que, para quaisquer valores de λ e μ, a reta $(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y = \lambda c + \mu c'$ é paralela a ambas ou coincide com uma delas.

14.5 Determine o valor de λ para o qual a reta $(1+2\lambda)x+(1-2\lambda)y = 1$ seja paralela à reta $2x + 3y = 5$.

15.1 Qual a distância entre as retas paralelas $3x+4y = 10$ e $3x+4y = 15$?

15.2 Sobre um piso horizontal, cujos pontos são dados por suas coordenadas (x, y), há um telhado plano, de tal modo inclinado que o ponto do telhado verticalmente acima de (x, y) tem altura $2x + 3y + 1$. Pergunta-se: qual o menor deslocamento que se deve dar ao ponto $P = (3, 1)$ para obter um ponto onde a altura do telhado seja igual a 15?

15.3 No exercício anterior, quais são os pontos do piso sobre os quais a altura do telhado é a mesma que no ponto $(3, 1)$? Quais os pontos sobre os quais a altura do telhado é 15? Entre estes últimos, qual o que está mais próximo de $(3, 1)$?

15.4 Dado um sistema OXY de eixos ortogonais, seja $OX'Y'$ um novo sistema, no qual os eixos OX' e OY' coincidem com as retas $y = x$ e $y = -x$ respectivamente, como no Exemplo 1 da seção 15. Se as coordenadas do ponto P são (x, y) no sistema original, determine as coordenadas (x', y') de P no novo sistema. Reciprocamente, obtenha x e y em função de x' e y'.

15.5 Seja A o conjunto dos pontos cujas coordenadas, no sistema OXY do Exercício anterior, satisfazem à condição $x^2 + xy + y^2 = 1$. Usando o sistema $OX'Y'$, identifique o conjunto A.

16.1 Mostre que as retas do feixe

$$m(2x + 6y - 5) + n(3x + 9y - 1) = 0$$

são paralelas entre si.

16.2 Mostre que o feixe

$$m(2x + 6y - 5) + n(3x + 9y - 3/2) = 0$$

reduz-se a uma única reta.

16.3 Prove que, se $c \neq c'$ então todas as paralelas à reta $ax + by = c$ pertencem ao feixe de retas

$$m(ax + by - c) + n(ax + by - c') = 0$$

16.4 Mostre que, se $ab' - ba' \neq 0$, qualquer reta do plano que passa pelo ponto de interseção das retas $ax + by = c$ com $a'x + b'y = c'$ pertence ao feixe

$$m(ax + by - c) + n(a'x + b'y - c') = 0$$

16.5 Suponha $ab' - ba' \neq 0$. No feixe de retas $m(ax+by-c)+n(a'x+b'y-c') = 0$, procure valores de m e n que dão uma reta vertical; idem para uma reta horizontal. (Escolha os valores mais simples e naturais.) Como todas essas retas passam pelo mesmo ponto, a vertical dá a abcissa e a horizontal dá a ordenada do ponto de interseção de todas elas. Mostre que se $ab' - ba' = 0$ então as retas do feixe são todas paralelas (caso $ac' - ca' \neq 0$) ou se reduzem a uma única (se $ac' - ca' = 0$).

16.6 Ache m e n de modo que a reta

$$m(2x + 3y - 5) + n(3x + 2y - 4) = 0$$

seja vertical. Em seguida, dê valores a m e n de modo que essa reta seja horizontal. Com isso, obtenha o ponto de interseção das retas $2x+3y = 5$ e $3x + 2y = 4$.

17.1 Prove que, quando θ varia entre 0 e 2π, o ponto (x, y) com $x = a\cos\theta$ e $y = b\,\text{sen}\,\theta$ descreve uma elipse.

17.2 As equações $x = a\sec\theta$ e $y = b\,\text{tg}\,\theta$, com θ diferente de $-\pi/2$ e de $\pi/2$, descrevem uma hipérbole.

17.3 Use a parametrização da circunferência apresentada no Exemplo 2 para obter uma parametrização da elipse por meio de funções racionais.

17.4 Na parametrização da circunferência dada no Exemplo 2, determine os quatro intervalos da reta real nos quais t deve variar a fim de que o ponto correspondente (x, y) esteja em cada quadrante do plano.

17.5 Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N = (0,1)$ e $Q = (u, 0)$ do plano. Mostre que, além do ponto N, essa reta corta a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x, y), onde $x = 2u/(u^2 + 1)$ e $y = (u^2 - 1)/(u^2 + 1)$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $N = (0, 1)$ e pelo ponto $P = (x, y)$ da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Mostre que esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, onde $u = x/(1 - y)$.

Chame de C a circunferência unitária, de equação $x^2 + y^2 = 1$. Conclua que a função $\xi: C - \{N\} \to \mathbb{R}$, definida por $\xi(P) = u = x/(1-y)$ se $P = (x, y)$, estabelece uma correspondência biunívoca entre $C - \{N\}$ e $\mathbb{R}$, cuja inversa $\xi^{-1}: \mathbb{R} \to C - \{N\}$ associa a cada número real u o ponto $(x, y) \in C$ tal que $x = 2u/(u^2+1)$ e $y = (u^2-1)/(u^2+1)$. A função ξ chama-se a *projeção estereográfica* de $C - \{N\}$ sobre $\mathbb{R}$ e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Segunda Parte

Vetores

18. Vetores no plano

Constatada a utilidade dos métodos algébricos empregados na Geometria Analítica, veremos agora como a eficiência desses métodos cresce ainda mais com a introdução dos vetores. Com eles a Álgebra, além de intérprete dos fatos geométricos, penetra na Geometria e passa a fazer parte dela.

Os vetores do plano serão definidos como classes de equipolência de segmentos orientados. Quando nos referirmos ao segmento de reta orientado AB, esta notação significará sempre que o sentido positivo de percurso vai da origem A para a extremidade B. O mesmo segmento, quando orientado no sentido oposto, será designado por BA. Diz-se que os segmentos de reta orientados AB e CD são *equipolentes*, e escreve-se $AB \equiv CD$, quando eles:

1) Têm o mesmo comprimento;

2) São paralelos ou colineares;

3) Têm o mesmo sentido.

Se AB e CD não estão sobre a mesma reta, as condições 1) e 2) significam que A, B, C e D são vértices de um paralelogramo e (na presença de 1) e 2)) a condição 3) significa que, assim como AB e CD, os segmentos AC e BD são lados opostos desse paralelogramo.

Evidentemente, uma vez verificado que AB e CD são paralelos, assim como AC e BD, então o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo, logo AB e CD têm o mesmo comprimento. Assim, é desnecessário provar que vale a condição 1).

A fim de que os segmentos orientados AB e CD sejam equipolentes é necessário e suficiente que o ponto médio do segmento AD coincida com o ponto médio de BC. Com efeito, um quadrilátero cujas diagonais se cortam mutuamente ao meio é um paralelogramo.

A relação de equipolência $AB \equiv CD$ é reflexiva (isto é, $AB \equiv AB$), simétrica (se $AB \equiv CD$ então $CD \equiv AB$) e transitiva (se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$ então $AB \equiv EF$). Além disso, como se vê sem dificuldade, dados A, B e C quaisquer no plano, existe um único ponto

D nesse plano, tal que $AB \equiv CD$. Noutras palavras, a partir de um ponto arbitrário C do plano pode-se traçar um (único) segmento orientado CD equipolente a AB.

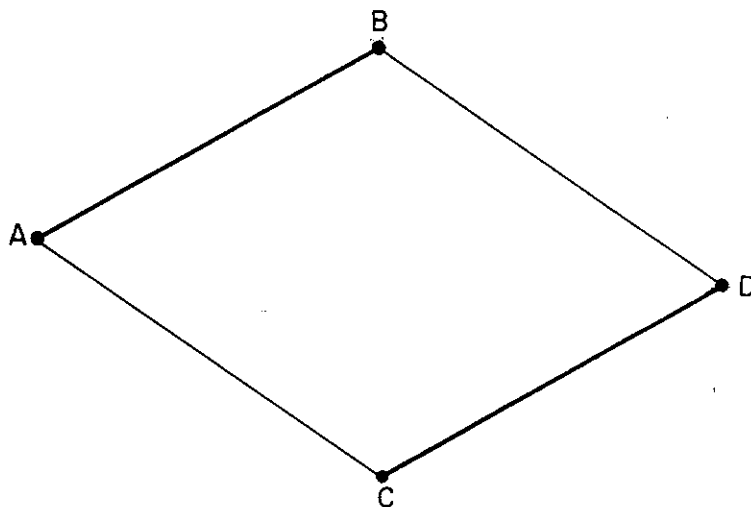



Fig. 18.1 - Segmentos orientados equipolentes.

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo *vetor* v. Escreve-se então $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Portanto, o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ do plano fica determinado pelo segmento de reta orientado AB ou por qualquer segmento orientado equipolente a AB. Se quisermos ser um pouco mais formais, diremos que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos de reta orientados que são equipolentes a AB (classe de equipolência de AB).

Por extensão, admitiremos também que um ponto qualquer do plano representa o *vetor nulo*, ou *vetor zero*.

Convêm guardar em mente que a equipolência $AB \equiv CD$ é o mesmo que a igualdade $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Em relação a um sistema de eixos ortogonais de origem O, fixado no plano, sejam $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$. Existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. As coordenadas desse ponto P são $(x' - x, y' - y)$.

Com efeito, tomando $P = (x' - x, y' - y)$, vemos que os segmentos AB e OP têm a mesma inclinação $(y' - y)/(x' - x)$ e que os segmentos OA e PB têm a mesma inclinação y/x. Assim, AB e OP, bem como OA e PB, são lados opostos de um paralelogramo. Portanto, AB e OP

são equipolentes.

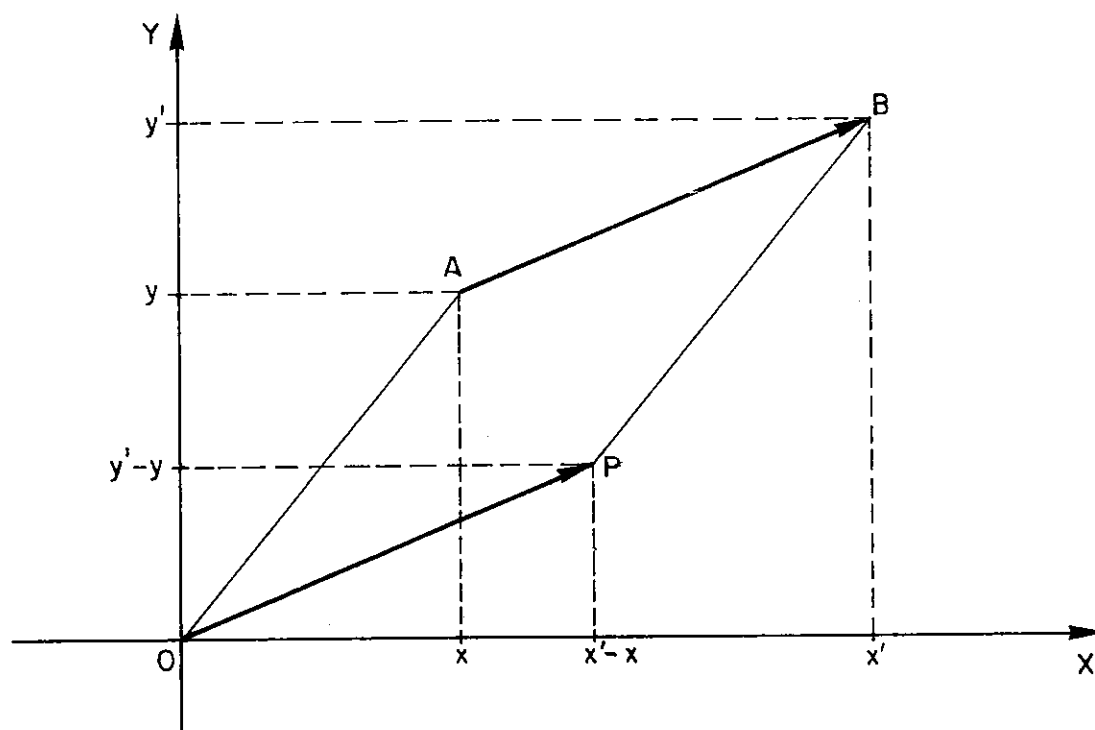



Fig. 18.2 - O segmento de origem O equipolente a AB.

Segue-se daí que, dados

$$A = (x, y), B = (x', y'), C = (s, t) \quad \text{e} \quad D = (s', t'),$$

tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $x' - x = s' - s$ e $y' - y = t' - t$. Com efeito, existe um único ponto $P = (x' - x, y' - y)$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ e um único ponto $Q = (s' - s, t' - t)$ com $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD}$. A fim de que seja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, é necessário e suficiente que $P = Q$, isto é, que

$$x' - x = s' - s \quad \text{e} \quad y' - y = t' - t.$$

Dados $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$, os números $\alpha = x' - x$ e $\beta = y' - y$ chamam-se as *coordenadas* do vetor $v = \overrightarrow{AB}$. Escreve-se também $v = (\alpha, \beta)$.

Definiremos a seguir a soma de dois vetores e o produto de um número real por um vetor.

Sejam $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores dados. A partir de um ponto E arbitrário no plano, tomamos segmentos EP e PS respectivamente

equipolentes a AB e CD. E pomos, por definição, $u + v = \overrightarrow{ES}$.

Se os segmentos orientados AB e CD não forem paralelos, a soma $u + v$ pode também ser definida de modo ligeiramente diferente: a partir do ponto E, fixado arbitrariamente, tomamos os segmentos orientados EP, equipolente a AB, e EQ equipolente a CD. Com eles construímos o paralelogramo $EPSQ$. A soma $u + v$ é o vetor representado pela diagonal ES.

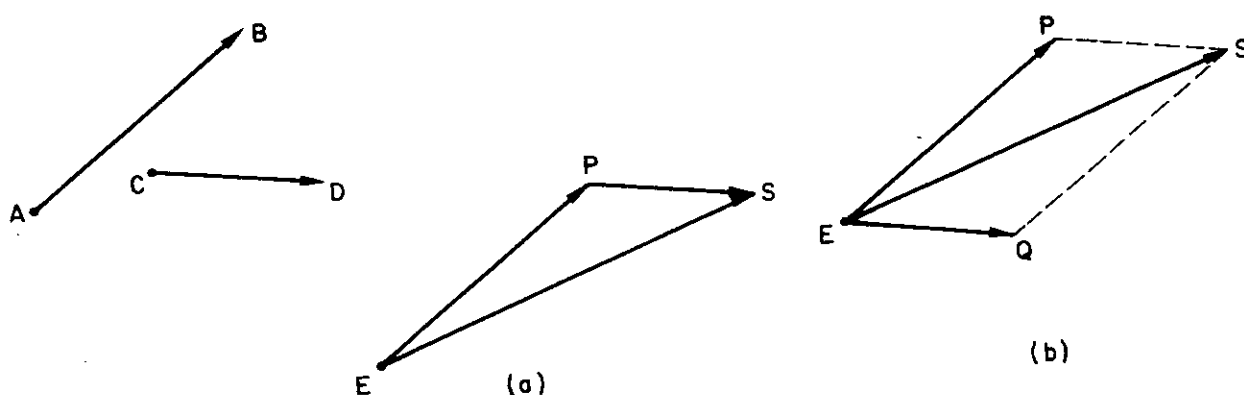



Fig. 18.3 - A soma de dois vetores, vista de dois modos.

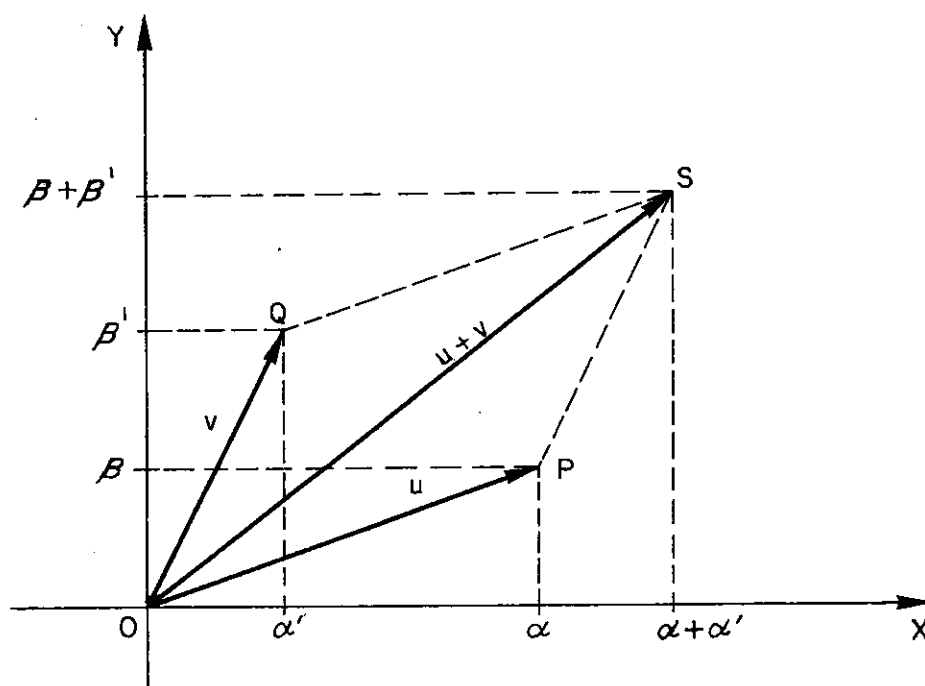



Fig. 18.4 - As coordenadas do vetor $u + v$.

Se $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ são dados por suas coordenadas então

$$u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta').$$

Isto se mostra representando u e v por segmentos orientados OP e OQ com origem em $O = (0,0)$ e extremidades $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\alpha', \beta')$ respectivamente.

Tomando $S = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$ vemos, como acima, que os segmentos OQ e PS, bem como OP e QS, têm a mesma inclinação, logo $OQSP$ é um paralelogramo, do qual OS é diagonal. Portanto

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = u + v.$$

Dados o número real λ e o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, o *produto* $\lambda \cdot v = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ é, por definição, o vetor representado pelo segmento de reta orientado AB', colinear com AB, com

$$\mathrm{d}(A, B') = |\lambda| \cdot \mathrm{d}(A, B)$$

sendo os sentidos de AB e AB' iguais quando $\lambda > 0$ e opostos se $\lambda < 0$.

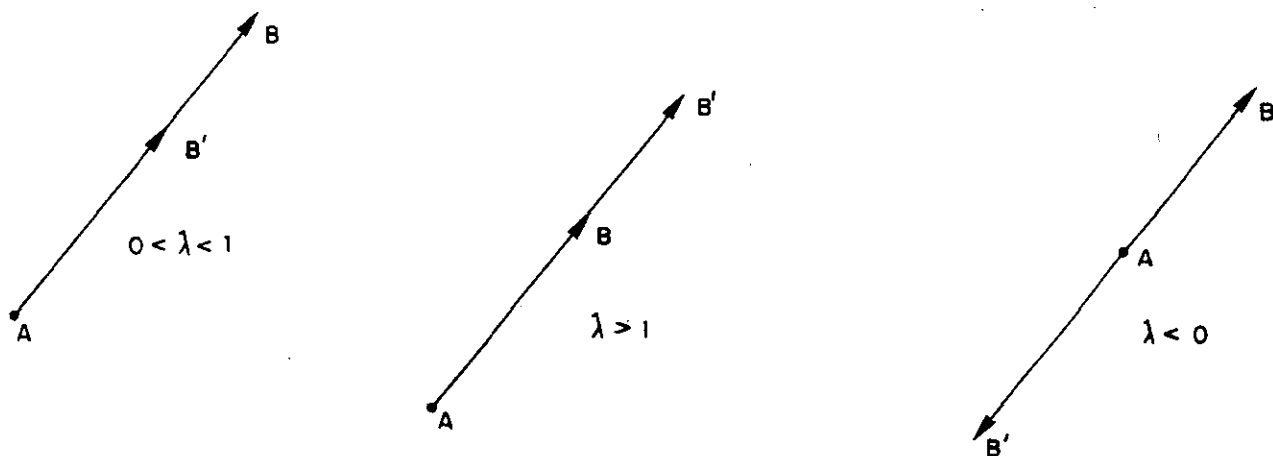



Fig. 18.5 - $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ **em três casos, para diferentes valores de** λ.

Se $v = (\alpha, \beta)$ então $\lambda \cdot v = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.
Com efeito, seja OP o segmento orientado, de origem O, equipolente

a AB. As coordenadas do ponto P são (α, β). Seja $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.

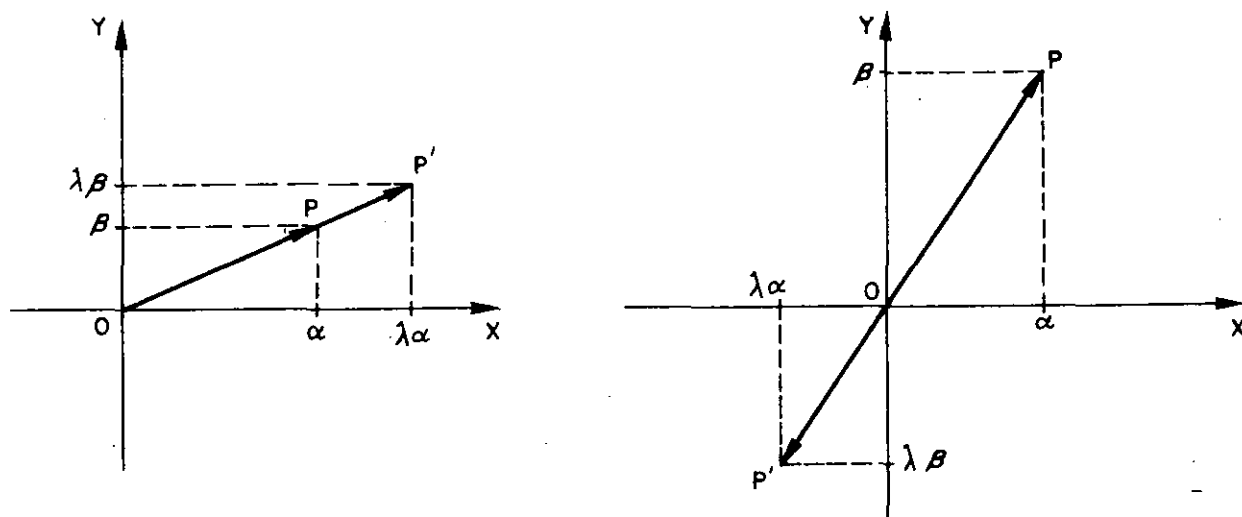



Fig. 18.6 - O produto $\lambda \cdot \overrightarrow{OP}$ com $\lambda > 0$ e com $\lambda < 0$.

Os segmentos OP e OP' têm a mesma inclinação β/α, portanto O, P e P' são colineares. Além disso,

$$\mathrm{d}(O, P') = |\lambda|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\lambda|\,\mathrm{d}(O, P).$$

E, finalmente, P e P' estão no mesmo lado de O ou em lados opostos, conforme seja $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Segue-se que $\overrightarrow{OP'} = \lambda \cdot v$, ou seja, que $\lambda v = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$, como foi afirmado inicialmente.

Dado $v = \overrightarrow{AB}$, o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$ é chamado o *simétrico* ou *oposto* de v. Se $v = (\alpha, \beta)$ então $-v = (-\alpha, -\beta)$. Evidentemente, $-v = (-1) \cdot v$.

O vetor zero será representado pelo mesmo símbolo 0 que indica o número real zero. Em termos de coordenadas, temos $0 = (0, 0)$.

A caracterização de um vetor por meio de suas coordenadas torna imediata a verificação das seguintes propriedades da adição de vetores e da multiplicação de um vetor por um número real λ. Essas propriedades são válidas para quaisquer vetores u, v, w do plano e quaisquer números

reais λ, μ:

Comutatividade :	$u + v = v + u$
Associatividades :	$(u + v) + w = u + (v + w)$,
	$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.
Elementos neutros :	$v + 0 = v$, $1 \cdot v = v$.
Inverso aditivo :	$v + (-v) = 0$
Distributividades :	$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
	$\lambda(u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
Anulamento do produto :	$0 \cdot v = 0$.

Esta última igualdade, a rigor, não pode ser provada pois na definição de $\lambda \cdot v$ que demos acima não foi incluído o caso $\lambda = 0$. Assim, a afirmação de que $0 \cdot v = 0$ é uma definição: o produto do número zero por qualquer vetor v é, por definição, igual ao vetor nulo. Note que, em $0 \cdot v = 0$, o símbolo 0 no primeiro membro representa o número zero e, no segundo membro, o vetor zero.

Para exemplificar, mostremos como se prova que

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \text{e que} \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

Sejam $u = (\alpha, \beta)$, $v = (\alpha', \beta')$ e $w = (\alpha'', \beta'')$. Então

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= ((\alpha + \alpha') + \alpha'', (\beta + \beta') + \beta'') \\ &= (\alpha + (\alpha' + \alpha''), \beta + (\beta' + \beta'' \\ &= u + (v + w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (u + v) &= \lambda \cdot (\alpha + \alpha', \beta + \beta') = (\lambda(\alpha + \alpha'), \lambda(\beta + \beta')) \\ &= (\lambda\alpha + \lambda\alpha', \lambda\beta + \lambda\beta') \\ &= (\lambda\alpha, \lambda\beta) + (\lambda\alpha', \lambda\beta') \\ &= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.\end{aligned}$$

Diremos que o vetor v é *combinação linear* dos vetores v_1, v_2, ..., v_n quando existirem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

O vetor $v = (\alpha', \beta')$ diz-se um *múltiplo* do vetor $u = (\alpha, \beta)$ quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = k \cdot u$, isto é, $\alpha' = k \cdot \alpha$ e $\beta' = k \cdot \beta$. Tomando $k = 0$, vemos que o vetor zero é múltiplo de qualquer outro. Se $v \neq 0$ é múltiplo de u então u é múltiplo de v pois de $v = k \cdot u$ resulta $u = (1/k) \cdot v$. Como vimos na seção 14, dizer que um dos vetores $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ é múltiplo do outro significa que um deles é zero ou que as retas $\alpha x + \beta y = 0$ e $\alpha' x + \beta' y = 0$ coincidem, isto é, que $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$.

O teorema abaixo e seu corolário resumem o essencial sobre combinações lineares de vetores no plano.

Teorema. *Se nenhum dos vetores u, v do plano é múltiplo do outro então todo vetor w desse plano se escreve (de modo único) como combinação linear $w = \lambda \cdot u + \cdot \mu \cdot v$.*

Demonstração: Sejam $u = (\alpha, \alpha')$, $v = (\beta, \beta')$ e $w = (\gamma, \gamma')$. Como u e v não são múltiplos um do outro, temos $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$. Queremos mostrar que existe um par de números reais λ, μ tais que $\lambda u + \mu v = w$. Esta igualdade entre vetores equivale a duas igualdades entre números:

$$\alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \mu = \gamma$$
$$\alpha' \cdot \lambda + \beta' \mu = \gamma'$$

Como $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$, segue-se da seção 16 que o sistema acima possui uma única solução (λ, μ), o que prova o teorema.

Corolário. *Dados 3 ou mais vetores no plano, pelo menos um deles é combinação linear dos demais.*

Com efeito, sejam u e v dois dos vetores dados. Se um destes, digamos v, é múltiplo do outro, $v = k \cdot u$, então v é combinação linear dos demais vetores dados, onde k é o coeficiente de u e os outros vetores dados entram com coeficiente zero. Se nenhum dos vetores u, v é múltiplo do outro, escolhamos um terceiro vetor w. Pelo Teorema 1, temos $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$. Logo w é uma combinação linear dos demais vetores dados, na qual λ e μ são os coeficientes de u e v respectivamente, enquanto os outros vetores entram com coeficiente zero.

Exemplo: Qualquer vetor do plano pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (2, -1)$ $v = (-3, 2)$ porque $2 \times 2 - (-1) \times (-3) \neq 0$. Se quisermos, por exemplo, escrever o vetor $w = (1, 1)$ como uma

combinação linear $w = \lambda u + \mu v$, deveremos ter

$$(1,1) = \lambda \cdot (2,-1) + \mu \cdot (-3,2) = (2\lambda, -\lambda) + (-3\mu, 2\mu) =$$
$$= (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$2\lambda - 3\mu = 1$$
$$-\lambda + 2\mu = 1.$$

Resolvendo este sistema, obtemos $\lambda = 5$, $\mu = 3$. Portanto, $w = 5u + 3v$ é a expressão do vetor w como combinação linear dos vetores u e v.

19. O produto interno de dois vetores

Dado o ponto $P = (\alpha, \beta)$, o comprimento do segmento de reta OP é, como sabemos, igual a $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Diremos também que este é o *comprimento do vetor* $v = \overrightarrow{OP}$ e escreveremos

$$|v| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Se $|v| = 1$, diremos que v é um vetor *unitário.*

Por exemplo, se $v \neq 0$ e $\lambda = 1/\|v\|$ então o vetor $\lambda \cdot v$ é unitário. Escreve-se, neste caso, $\lambda \cdot v = v/\|v\|$.

Sejam u e v vetores unitários. Chamemos de u^* o vetor unitário obtido de u por uma rotação positiva de 90°. Seja ainda θ o ângulo de u para v. O Teorema da seção 18 assegura a existência de números reais x, y tais que $v = x \cdot u + y \cdot u^*$. Das definições de seno e cosseno resulta que $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$. Podemos então escrever

$$v = \cos\theta \cdot u + \operatorname{sen}\theta \cdot u^*.$$

Dados os vetores $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$, chama-se *produto interno* de u por v ao número

$$\langle u, v \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'.$$

Segue-se imediatamente desta definição que

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \langle v, u \rangle \\
\langle \lambda u, v \rangle &= \lambda \cdot \langle u, v \rangle = \langle u, \lambda \cdot v \rangle \\
\langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\
\langle v, v \rangle &= |v|^2 \\
\langle 0, v \rangle &= 0 \\
\langle v, v \rangle &= 0 \Rightarrow v = 0,
\end{aligned}$$

para quaisquer vetores u, v, w e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Daremos, a seguir, o significado geométrico do produto interno de dois vetores. Inicialmente, temos o

Lema. *Se u e v são perpendiculares então* $\langle u, v\rangle = 0$.

Demonstração: Representemos u e v por segmentos orientados de origem O. Como u e v são perpendiculares, o Teorema de Pitágoras nos dá

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

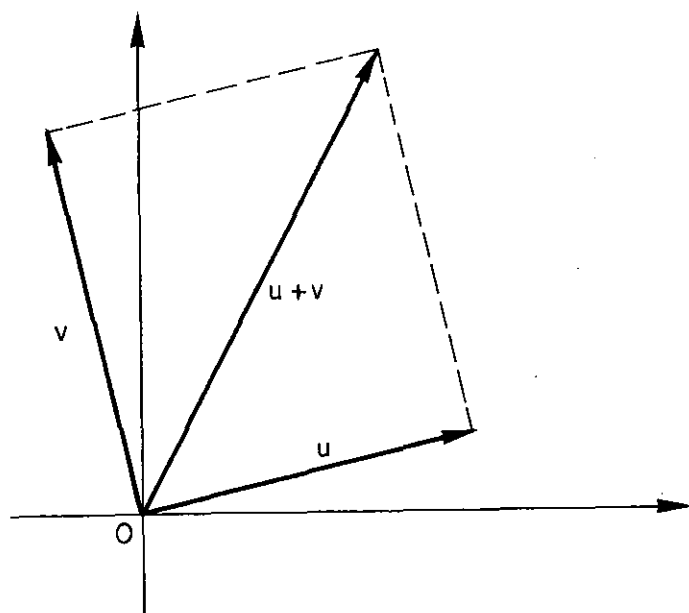



Fig. 19.1 - Se u e v são perpendiculares, o vetor $u+v$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $|u|$ e $|v|$.

Mas $|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = |u|^2+|v|^2+2\langle u, v\rangle$. Por comparação, vem $2\cdot\langle u, v\rangle = 0$, donde $\langle u, v\rangle = 0$.

Teorema 1. *Se θ é o ângulo entre u e v, tem-se*

$$\langle u, v\rangle = |u|\cdot|v|\cdot\cos\theta.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente $|u| = |v| = 1$.

Então, se chamarmos u^* o vetor obtido de u por uma rotação positiva de 90° teremos

$$v = \cos\theta\cdot u + \operatorname{sen}\theta\cdot u^*.$$

Tomemos o produto interno de ambos os membros desta igualdade pelo vetor u, levando em conta que, pelo Lema, $\langle u, u^*\rangle = 0$ e que, além disso,

$\langle u, u\rangle = 1$. Obtemos então

$$\langle u, v\rangle = \cos\theta \cdot \langle u, u\rangle + \operatorname{sen}\theta \cdot \langle u, u^*\rangle = \cos\theta.$$

Em seguida, consideremos o caso em que $u \neq 0$ e $v \neq 0$ têm comprimentos arbitrários $|u|$ e $|v|$. Então $u/|u|$ e $v/|v|$ têm comprimento 1 e formam entre si o mesmo ângulo θ que u e v formam. Logo

$$\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \langle \frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$$

Finalmente, se algum dos vetores u, v é nulo, a igualdade $\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$ é óbvia.

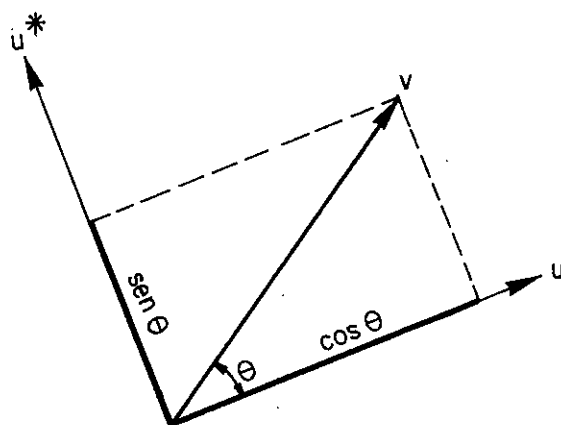



Fig. 19.2 - Projeções do vetor unitário v sobre 2 eixos ortogonais.

Corolário (Recíproca do Lema). *Se $\langle u, v\rangle = 0$ então os vetores u e v são perpendiculares.*

Acima, por extensão, estamos admitindo que o vetor 0 é perpendicular a qualquer vetor.

Temos, portanto, duas fórmulas que exprimem o produto interno dos vetores $u = (\alpha \cdot \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$, a saber:

$$\langle u, v\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' \quad \text{e} \quad \langle u, v\rangle = |u||v|\cos\theta.$$

A simplicidade da primeira fórmula torna imediatas as propriedades algébricas do produto interno, como por exemplo $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, que é mais trabalhosa de provar usando a segunda. Por outro lado, a expressão $\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\theta$ empresta significado geométrico

ao produto interno e permite aplicá-lo em Geometria Analítica, como veremos no que se segue.

Se os vetores $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ são diferentes de zero, o Teorema 1 pode ser escrito como

$$\langle u/|u|, v/|v|\rangle = \cos\theta,$$

onde Θ é o ângulo entre u e v. Noutros termos, vale

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}} = \cos\theta \quad (*)$$

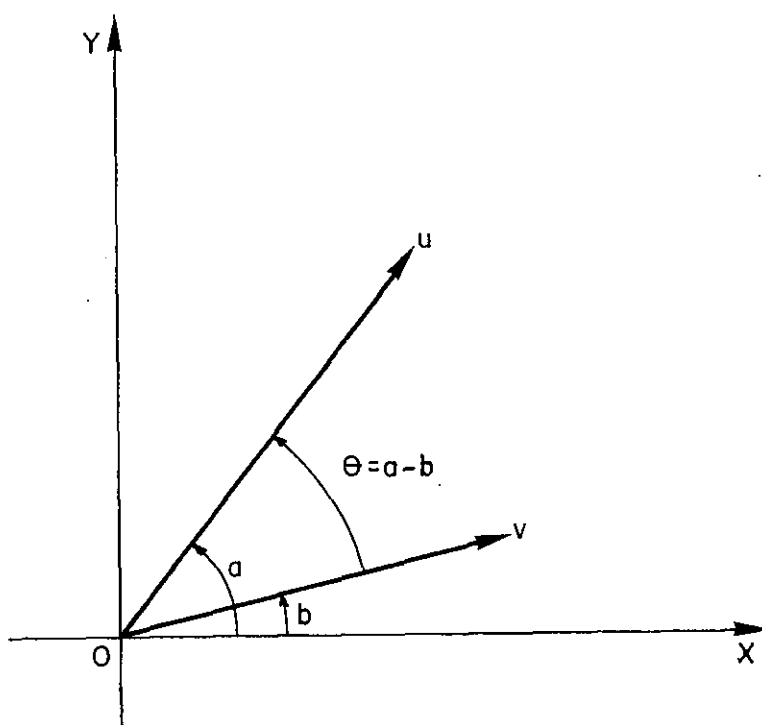



Fig. 19.3 - Usando vetores em Trigonometria.

Se chamarmos de a e b respectivamente os ângulos que os vetores u e v formam com o eixo horizontal, temos $\theta = a - b$,

$$\cos a = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\operatorname{sen} a = \beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\cos b = \alpha'/\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

e

$$\operatorname{sen} b = \beta' / \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}.$$

Portanto, a fórmula $(*)$ acima significa:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

O leitor pode verificar, reciprocamente, que os passos acima podem ser revertidos e, partindo desta expressão de $\cos(a-b)$, chega-se à fórmula $\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$, o que fornece uma demonstração alternativa do Teorema 1.

Uma aplicação do Teorema 1 à Geometria Analítica é a dedução da equação da reta por métodos vetoriais.

Dada uma reta r no plano, seja $n = (a, b)$ um vetor *normal* a r. (Isto significa que $n \neq 0$ e que, escrevendo $n = \overrightarrow{AB}$ (ou seja, representando n pelo segmento orientado AB) tem-se AB perpendicular a r.)

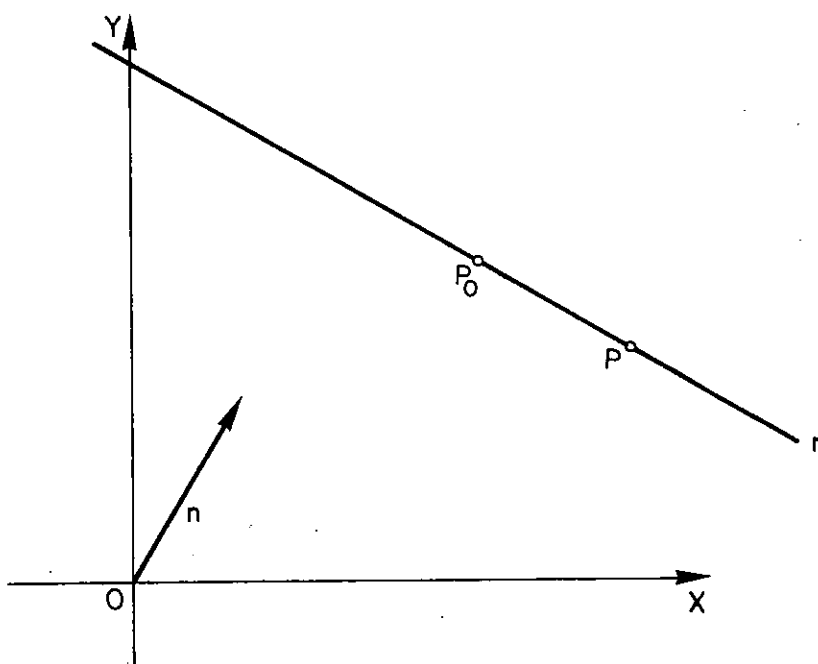



Fig. 19.4

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto fixado em r. Um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é perpendicular a n, isto é, $\langle n, \overrightarrow{P_0P}\rangle = 0$. Como $n = (a, b)$ e $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$, a condição para que o ponto $P = (x, y)$ pertença à reta r se exprime

como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by = c, \quad \text{onde} \quad c = ax_0 + by_0.$$

Para finalizar esta seção, um comentário relevante. Ao definirmos o produto interno de dois vetores por meio de suas coordenadas, deixamos no ar uma questão: Se tomássemos outro sistema de eixos ortogonais, as coordenadas dos vetores dados seriam outras. Neste caso, seu produto interno se alteraria? O Teorema 1 nos autoriza a dizer que o produto interno $\langle u, v\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, sendo igual ao produto dos comprimentos de u e v pelo cosseno do ângulo entre eles, mantém-se inalterado, mesmo que, ao passar de um sistema de eixos para outro, mudem as coordenadas de u e v.

Exemplo 1. Num sistema de eixos dado, sejam $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$. Suponhamos que os eixos foram mudados. Agora, o eixo das abcissas é a reta $x = y$ e o eixo das ordenadas é a reta $y = -x$, a primeira orientada no sentido crescente de x (ou de y, que é igual) e a segunda orientada no sentido decrescente de x (ou crescente de y). As novas coordenadas dos vetores u e v, como foi visto no Exemplo 1 da seção 15, passam a ser $u = (\gamma, \delta)$ e $v = (\gamma', \delta')$, onde

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{2}}, \quad \delta = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma' = \frac{\beta' - \alpha'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \delta' = \frac{\alpha' + \beta'}{\sqrt{2}}.$$

Como tinha de ser, o produto interno de u por v, calculado em termos destas novas coordenadas, é

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \gamma\gamma' + \delta\delta' \\ &= \frac{(\beta - \alpha)(\beta' - \alpha')}{2} + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')}{2} \\ &= \alpha\alpha' + \beta\beta'.\end{aligned}$$

Exemplos mais simples para verificar seriam:

a) um sistema no qual o novo eixo das abcissas seria o antigo eixo das ordenadas e vice-versa;

b) um sistema no qual a orientação de um ou de ambos os eixos seria invertida.

Tais verificações são meras constatações do fato que já sabemos ser verdadeiro em geral.

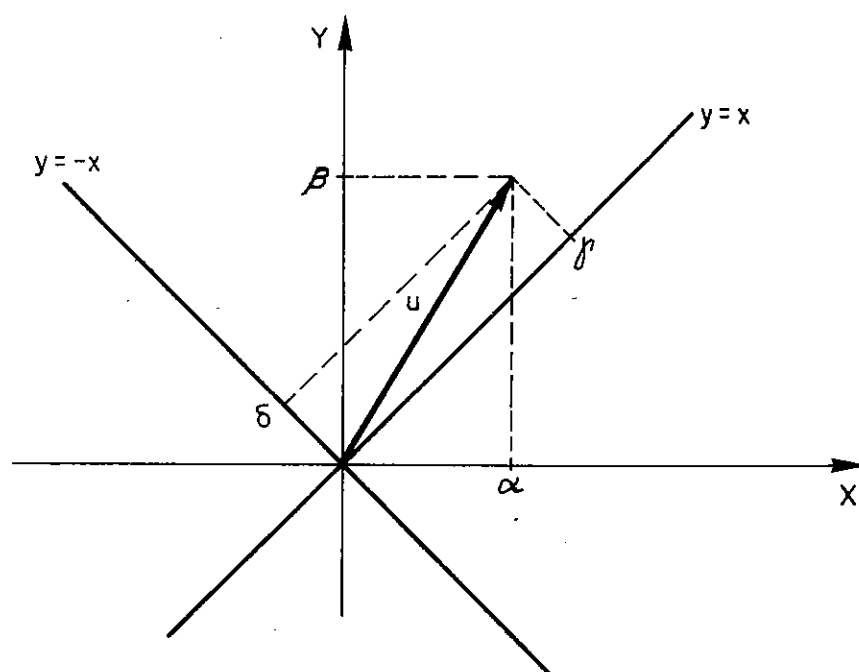



Fig. 19.5 - As coordenadas do vetor u no sistema antigo eram (α, β) e no sistema novo são (γ, δ).

Talvez seja útil chamar a atenção para um tipo de mudança de eixos, depois da qual as coordenadas dos pontos se alteram mas as coordenadas dos vetores não mudam.

São as translações de eixos, que consistem em substituir os eixos OX e OY por eixos $O'X'$ e $O'Y'$, paralelos e de mesmo sentido que os originais. Então, se o ponto O' tem coordenadas (a, b) no sistema OXY, um ponto de coordenadas (x, y) no sistema original passa a ter coordenadas $(x - a, y - b)$ no novo sistema. O vetor $v = \overrightarrow{AB}$, com $A = (x, y)$, $B = (x', y')$ no sistema OXY, tem coordenadas $x' - x$ e $y' - y$. No novo sistema, as coordenadas de v são $(x' - a) - (x - a)$ e $(y' - a) - (y - a)$, isto é, continuam iguais a $x' - x$ e $y' - y$.

Exemplo 2. Vimos no Exemplo 7, Seção 4, que a rotação positiva de 90° em torno da origem leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P^* = (-y, x)$. Portanto, se o vetor v tem coordenadas (α, β), o vetor $v^* = (-\beta, \alpha)$, é

obtido de v por rotação de 90°, logo é ortogonal a v. Isto se comprova também notando que $\langle v, v^* \rangle = \alpha(-\beta) + \beta\alpha = 0$. Evidentemente, todos os múltiplos $\lambda v = (-\lambda\beta, \lambda\alpha)$ também são ortogonais a v. E reciprocamente, todo vetor ortogonal a v é um múltiplo de v^*. Noutras palavras, se $\alpha x + \beta y = 0$ então existe λ tal que $x = -\lambda\beta$ e $y = \lambda\alpha$. (Com efeito, se dois vetores são ortogonais a um terceiro então um deles é múltiplo do outro.)

20. Combinações afins

É natural indagar se é possível somar pontos do plano, já que sabemos somar vetores.

Fixando um sistema de eixos ortogonais de origem O, poderíamos definir a "soma" $A + B$ dos pontos A e B como sendo a extremidade C do vetor $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Isto pode ser feito, mas é preciso observar que o resultado C da soma $A + B$ depende da escolha do ponto O. Por exemplo, se tomarmos $O = A$ teremos $A + B = B$ e se tomarmos $O =$ ponto médio do segmento AB teremos $A + B = O$. Isto contrasta com a soma de vetores, cujo resultado é um vetor que não depende do sistema de coordenadas usado.

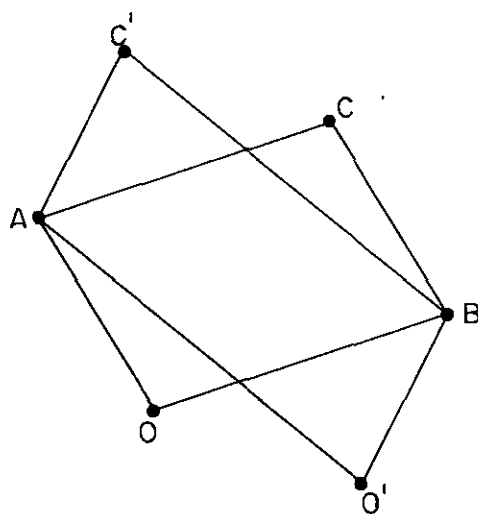



Fig. 20.1 - Tentando definir a soma $A + B$, vemos que ela depende da escolha da origem O.

Por outro lado, a diferença $B - A$ entre 2 pontos A, B pode ser definida como o vetor $\overrightarrow{AB}$. Pondo $B - A = \overrightarrow{AB}$, resgatamos a concepção original de Burali-Forti e Marcolongo, pioneiros do Cálculo Vetorial, no início do século 20, segundo os quais um vetor é a diferença entre dois pontos. Resgatamos também o significado da palavra "vetor": o condutor ou transportador. (Do Latim vehere = transportar.) Com efeito, a igual-

dade $B - A = \overrightarrow{AB}$ será também escrita $B = A + \overrightarrow{AB}$. Assim, o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ transporta o ponto A para a posição do ponto B.

Em suma: a diferença $B - A$ entre dois pontos é o vetor $\overrightarrow{AB}$ e a soma $A + \overrightarrow{AB}$ do ponto A com o vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto B.

Com esta convenção, podemos definir, para dois pontos quaisquer A, B e números reais λ, μ, com $\lambda + \mu = 1$, a *combinação afim* $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$. Poremos, por definição:

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{se} \quad \lambda + \mu = 1.$$

Chega-se a esta definição manipulando formalmente a expressão $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$, levando em conta que $\lambda = 1 - \mu$. Então

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B = (1 - \mu)A + \mu B = A + \mu \cdot (B - A) = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Evidentemente, $A + \mu \cdot \overrightarrow{AB}$ tem significado intrínseco:

$$A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} = C, \quad \text{onde} \quad \overrightarrow{AC} = \mu \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Exemplo: O ponto $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, transportado de A pelo vetor $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, é certamente o ponto médio do segmento de reta AB. Por outro lado, o ponto $B' = 2A - B$, que também é uma combinação afim de A e B pois $2 + (-1) = 1$ é, por definição, igual a $A - \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{BA}$, logo se obtém transportando A pelo vetor $\overrightarrow{BA}$ e assim B' é o simétrico de B em relação a A.

Observação: Isoladamente, λA e μB não fazem sentido mas, se $\lambda + \mu = 1$, $\lambda A + \mu B$ faz.

Dados A, B, pontos distintos do plano, quando o parâmetro t assume todos os valores reais, o ponto

$$(1 - t)A + tB = A + t \cdot \overrightarrow{AB},$$

combinação afim de A e B, percorre a reta determinada por estes 2 pontos.

Se forem dados o ponto A e o vetor $v \neq 0$, a reta que passa por A e é paralela a (qualquer segmento de reta que represente) v é o conjunto

dos pontos $A + t \cdot v$, $t \in \mathbb{R}$. As equações

$$P(t) = (1-t)A + tB, \quad P(t) = A + tv$$

são chamadas as *equações paramétricas* da reta que passa por A e B (no primeiro caso) ou da reta que passa por A e é paralela ao vetor v.

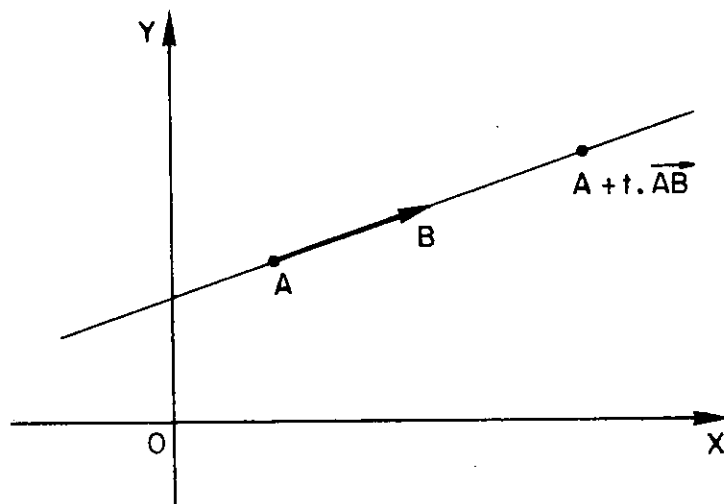



Fig. 20.2 - A reta que passa por A, paralela a $v = \overrightarrow{AB}$.

Se nos restringirmos a considerar $t \in [0,1]$, isto é, $0 \leq t \leq 1$, o ponto $P(t) = (1-t)A + tB$ percorre o segmento de reta de extremidades A e B, começando com A quando $t = 0$ e terminando em B quando $t = 1$. Para cada $t \in [0,1]$ temos

$$\mathrm{d}(P(t), A) = t \cdot d(A,B) \quad \text{e} \quad \mathrm{d}(P(t), B) = (1-t) \cdot \mathrm{d}(A,B)$$

como se vê facilmente. Segue-se que

$$\frac{|\overrightarrow{AP(t)}|}{|\overrightarrow{P(t)B}|} = \frac{t}{1-t},$$

logo $P(t) = (1-t)A + tB$ é o ponto do segmento AB que o divide na razão t: $(1-t)$.

Por exemplo, $(1/2)A + (1/2)B$ é o ponto médio do segmento AB pois o divide na razão $(1/2)\colon(1/2) = 1$. Analogamente, o ponto $(1/3)A + (2/3)B$ divide o segmento AB na razão $(2/3)\colon(1/3) = 2$. Isto significa que a distância de $P = (1/3)A + (2/3)B$ ao ponto A é o dôbro da distância de P a B.

Num dado sistema, se as coordenadas dos pontos A e B são $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ então as coordenadas do ponto $P = (1-t)A + tB$ são

$$P = \big((1-t)x + tx',\ (1-t)y + ty'\big).$$

Sejam A, B, C pontos do plano e λ, μ, ν números reais com $\lambda + \mu + \nu = 1$. A *combinação afim* $P = \lambda A + \mu B + \nu C$ é por definição, o ponto

$$P = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Como $\lambda + \mu + \nu = 1$, existem sempre dois desses 3 números com soma diferente de zero. Seja $\lambda + \mu \neq 0$. Então podemos escrever:

$$P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C = (\lambda + \mu)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}A + \frac{\mu}{\lambda+\mu}B\right] + \nu C.$$

Isto exibe P como combinação afim dos pontos D e C, onde

$$D = \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right]A + \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]B$$

é, por sua vez, combinação afim de A e B.

Se $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ e $\lambda + \mu + \nu = 1$, o ponto D pertence ao segmento de reta AB e o ponto $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$ pertence ao segmento de reta AD. Portanto P pertence ao triângulo ABC. Reciprocamente, dado um ponto arbitrário P do triângulo ABC, a reta CP encontra o lado AB num ponto D.

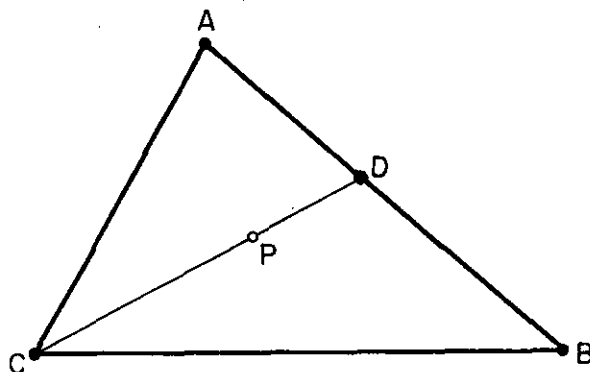



Fig. 20.3 - P está em CD e D está em AB.

Como P pertence a CD, temos $P = (1-s)C + sD$, com $s \in [0, 1]$. Por outro lado, como D está no segmento AB, temos $D = (1-t)A + tB$,

com $t \in [0,1]$. Substituindo, vem:

$P = (1-s)C + s[(1-t)A + tB] = (1-s)C + s(1-t)A + st \cdot B$

Pondo $\lambda = s(1-t)$, $\mu = st$ e $\nu = 1-s$, vemos que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\lambda + \mu + \nu = 1$ e $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$.

Concluímos assim que um ponto P pertence ao triângulo ABC se, e somente se, $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$, com $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ e $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Ao falar no triângulo ABC, estamos supondo tacitamente que os vértices A, B e C não são colineares. Se, porém, A, B e C estão sobre a mesma reta (digamos, com C entre A e B) então $C = (1-t)A + tB$, $t \in [0,1]$, e daí

$$\lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C = [\lambda + \nu(1-t)]A + (\mu + \nu t)B$$

com $\lambda + \nu(1-t) + \mu + \nu \cdot t = 1$. Logo o triângulo ABC, neste caso, se degenera no segmento de reta AB.

Se A, B, C não são colineares, os números não-negativos λ, μ, ν com $\lambda + \mu + \nu = 1$ chamam-se as *coordenadas baricêntricas* do ponto $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$, no triângulo ABC. Como $P = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC}$, temos também $\overrightarrow{AP} = \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC}$. Isto mostra que as coordenadas baricêntricas μ e ν são os coeficientes que exprimem o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. (Cfr. Teorema 1, seção 18.) Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, segue-se que μ e ν (e portanto $\lambda = 1 - (\mu + \nu)$) são univocamente determinados a partir do ponto P (e do triângulo ABC).

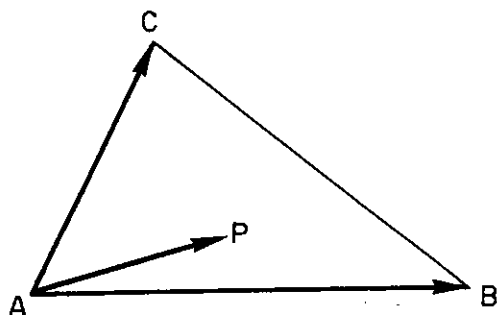



Fig. 20.4 - Unicidade das coordenadas baricêntricas.

O ponto $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$ está sobre o lado AB se, e somente se, $\nu = 0$. Observações análogas valem para os outros 2 lados.

Os vértices A, B e C são os pontos do triângulo com 2 coordenadas baricêntricas iguais a zero. P está no interior do triângulo precisamente quando $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$.

O *baricentro* do triângulo ABC é o ponto

$$P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

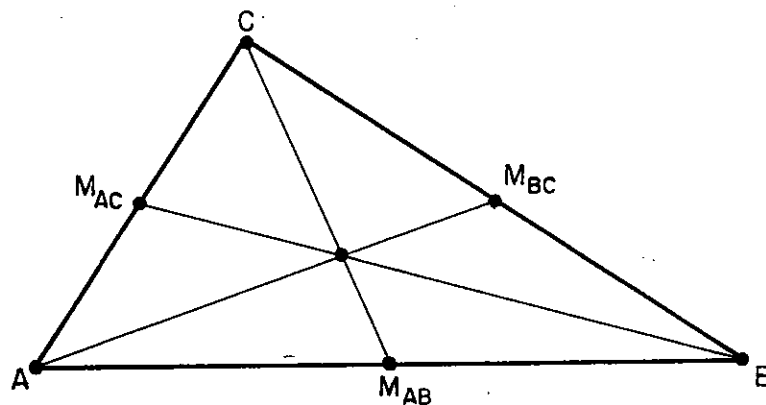



Fig. 20.5 - As três medianas de um triângulo.

Sejam

$$M_{AB} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B, \; M_{BC} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C, \; M_{AC} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$$

os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Os segmentos AM_{BC}, BM_{AC} e CM_{AB} chamam-se as *medianas* desse triângulo. Temos

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M_{BC} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = P$$

Analogamente se vê que

$$P = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}M_{AC} \quad \text{e} \quad P = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}M_{AB}.$$

Portanto o baricentro P está sobre as 3 medianas e divide cada uma delas na razão $2:1$.

Se omitirmos a restrição de que os coeficientes λ, μ e ν sejam não-negativos, as combinações afins $\lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$ de três pontos não-colineares A, B e C cobrem todos os pontos do plano, não apenas os do triângulo ABC.

Mais precisamente: se os pontos A, B e C não são colineares então para cada ponto P do plano que os contém existe um único par de números reais μ, ν com $P = \mu \cdot A + \nu \cdot B$.

Com efeito, a igualdade $P = \lambda \cdot A + \mu \cdot B + \nu \cdot C$ equivale a

$$P = A + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC},$$

com $\lambda = 1 - (\mu + \nu)$, ou ainda, a

$$\overrightarrow{AP} = \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Ora, sendo A, B e C não-colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro. Logo, pelo Teorema da seção 17, existe um único par de números reais μ, ν com

$$\overrightarrow{AP} = \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC}.$$

21. Projeção ortogonal de um vetor

Diz-se que um vetor v é *paralelo* à reta r quando, para quaisquer pontos A e B sobre r, o vetor v é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$. Com esta terminologia, quando A e B são pontos de r, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo à reta r.

Analogamente, diz-se que v é *perpendicular* à reta r quando $\langle v, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$ para A, B quaisquer em r. (Isto inclui o caso $v = 0$.)

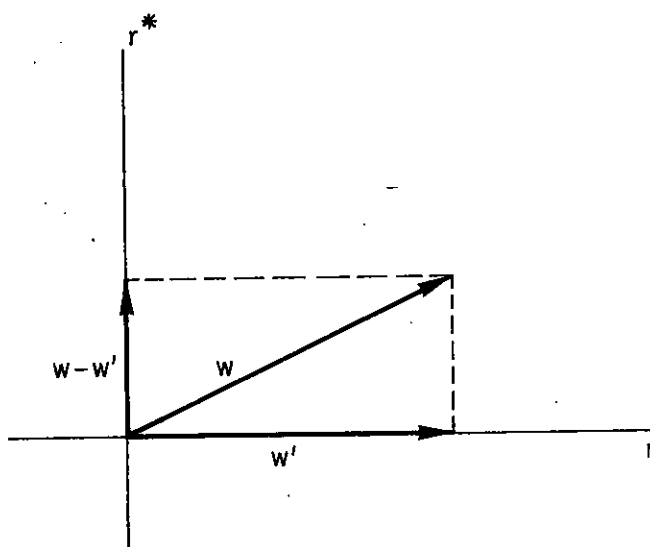



Fig. 21.1 - A projeção ortogonal w' do vetor w sobre a reta r.

A *projeção ortogonal* do vetor w sobre a reta r é um vetor w', paralelo à reta r, tal que $w - w'$ é perpendicular a r.

Seja r^* uma reta perpendicular a r. Se w' é a projeção ortogonal de w sobre r então $w - w'$ é a projeção ortogonal de w sobre r^*, pois $w - w'$ é paralelo a r^* e $w - (w - w') = w'$ é perpendicular a r^*.

Tomemos um vetor unitário u paralelo a r. Se w' é a projeção ortogonal de w sobre r então w' é múltiplo de u, isto é, $w' = x \cdot u$, $x \in \mathbb{R}$. Além disso, como

$$0 = \langle w - w', u\rangle = \langle w, u\rangle - \langle w', u\rangle,$$

temos

$$\langle w, u\rangle = \langle w', u\rangle = \langle x \cdot u, u\rangle = x \cdot \langle u, u\rangle = x.$$

Portanto, a projeção ortogonal de w sobre a reta r é

$$w' = \langle w, u \rangle \cdot u, \qquad (*)$$

onde u é um vetor unitário paralelo a r. O outro vetor unitário paralelo a r é $-u$. Como

$$\langle w, -u \rangle \cdot (-u) = \langle w, u \rangle \cdot u,$$

a expressão $(*)$ não depende de qual vetor unitário u, paralelo a r, se tomou. Mais geralmente, se v é qualquer vetor não-nulo paralelo a r, o vetor $u = v/|v|$ é unitário (e paralelo a r) logo

$$w' = \langle w, \frac{v}{|v|} \rangle \cdot \frac{v}{|v|} = \langle w, \frac{v}{|v|^2} \rangle \cdot v.$$

Exemplo: Sejam dados os pontos $A = (1,1)$, $B = (2,3)$, $C = (-4,1)$, $D = (-2,1)$. Para determinarmos a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{CD}$ sobre a reta AB, começamos obtendo um vetor unitário u, paralelo a AB. Como $\overrightarrow{AB} = (1,2)$, temos $u = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Por outro lado, $w = \overrightarrow{CD} = (2,0)$, portanto a projeção procurada é o vetor

$$w' = \langle w, u \rangle u = (2/\sqrt{5}) \cdot u = (2/5, 4/5).$$

22. Áreas do paralelogramo e do triângulo

Consideremos um paralelogramo $ABDC$ no plano. Ponhamos $\overrightarrow{AB} = v$ e $\overrightarrow{AC} = w$. Seja w' a projeção ortogonal de w sobre a reta AB.

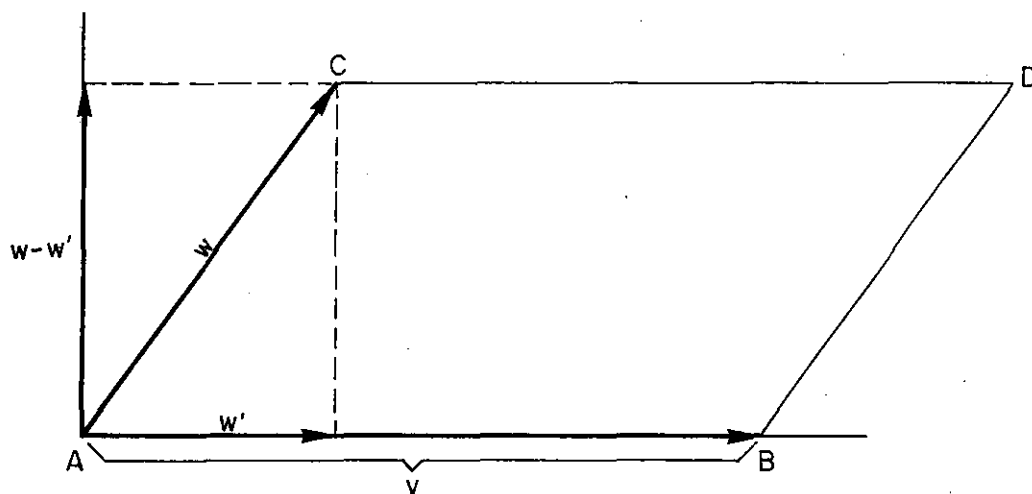



Fig. 22.1 - O paralelogramo construído sobre os vetores v, w tem área igual a $|w - w'| \cdot |v|$.

Vamos obter uma expressão para o quadrado da área do paralelogramo $ABDC$ em função dos vetores v e w. Como $w - w'$ é perpendicular a v, temos

$$(\text{área } \ ABDC)^2 = |w - w'|^2 \cdot |v|^2.$$

Sabemos que $w' = \langle w, v\rangle \cdot v/|v|^2$. Além disso, pelo Teorema de Pitágoras, $|w - w'|^2 = |w|^2 - |w'|^2$. Portanto,

$$(\text{área } \ ABDC)^2 = |w|^2|v|^2 - |w'|^2|v|^2.$$

Mas $|w'|^2 = \langle w, v\rangle^2 \cdot |v|^2/|v|^4$, logo $|w'|^2|v|^2 = \langle w, v\rangle^2$.

Concluímos então que

$$(\text{área } \ ABDC)^2 = |v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2. \qquad (*)$$

Um quadro como

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

chama-se a *matriz* cujas linhas são (a, c) e (b, d) e cujas colunas são (a, b) e (c, d). O número $ad - bc$ chama-se o *determinante* desta matriz; ele é representado por

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Portanto, na notação de determinantes, como $|v|^2 = \langle v, v\rangle$ e $|w|^2 = \langle w, w\rangle$, a fórmula $(*)$ escreve-se:

$$(\text{área } ABDC)^2 = \begin{vmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle v, w\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix}$$

Segue-se desta fórmula que

$$|v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v, w\rangle^2 \geq 0$$

quaisquer que sejam os vetores v e w. Esta desigualdade, que também se escreve como $|\langle v, w\rangle| \leq |v| \cdot |w|$, chama-se *desigualdade de Cauchy-Schwarz*. Ela também se prova facilmente a partir da igualdade

$$\langle u, v\rangle = |u| \cdot |v| \cos\theta.$$

Sejam $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$ as coordenadas dos vetores v e w em termos de um sistema de eixos ortogonais OXY fixado no plano. Então, pela fórmula $(*)$, temos:

$$(\text{área de } ABDC)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2.$$

Um cálculo muito simples mostra que o segundo membro da igualdade acima é igual a $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, portanto

$$\text{área de } ABDC = \pm(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

O determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ da matriz cujas colunas são os vetores v e w, nesta ordem, pode ser positivo ou negativo. (Pode também ser zero, mas somente quando v e w são múltiplos um do outro.) O valor absoluto deste determinante é, portanto, igual à área do paralelogramo $ABDC$. Mas seu sinal também tem um significado geométrico, que examinaremos agora. Supondo $\alpha \neq 0$, podemos escrever:

$$\Delta = \alpha \cdot \left(\delta - \frac{\beta}{\alpha}\gamma\right)$$

Se α for positivo, o sinal de Δ será o sinal da diferença $\delta-(\beta/\alpha)\gamma$, a qual é > 0 se $w=(\gamma,\delta)$ estiver acima da reta $y=(\beta/\alpha)x$, que contém o vetor v e será negativo se w estiver abaixo de v.

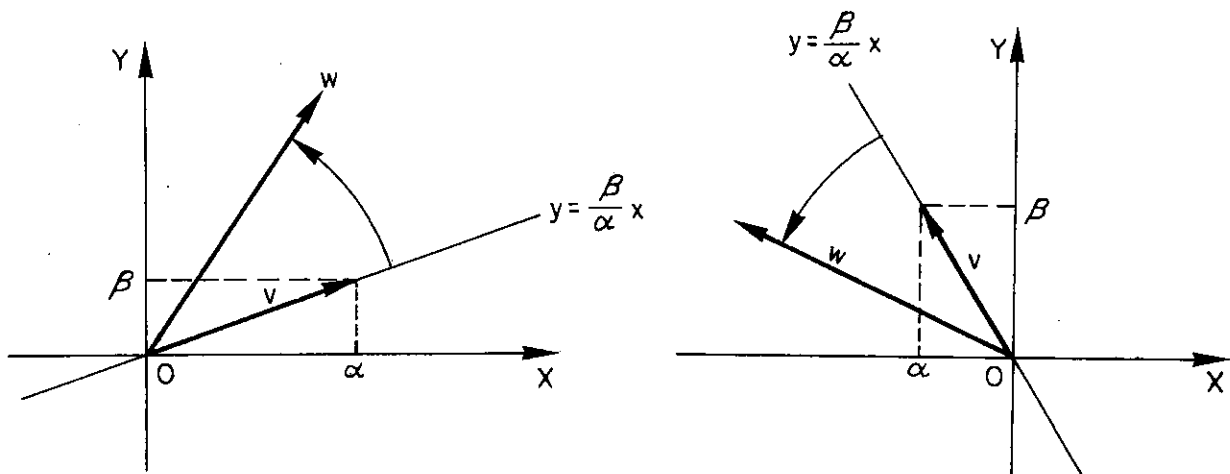



Fig. 22.2 - Nas posições acima, o determinante cujas colunas são os vetores v e w, nesta ordem, é positivo.

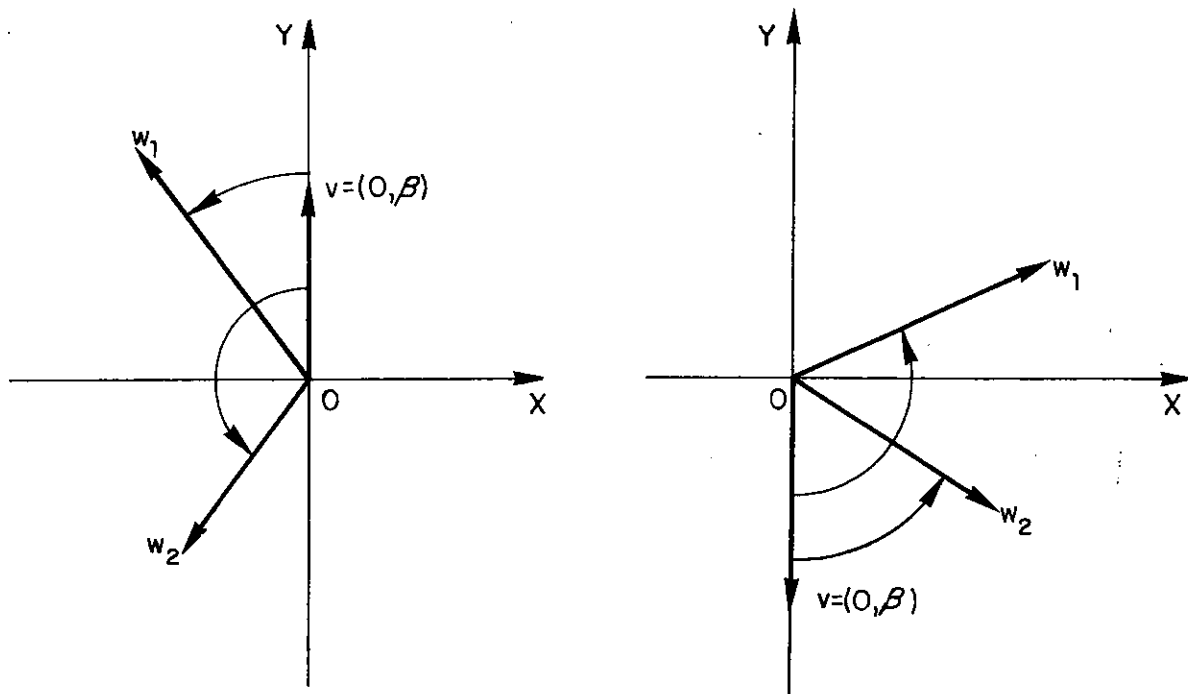



Fig. 22.3 - Nas posições acima, o determinante cujas colunas são v e w_1 ou v e w_2, nesta ordem, é sempre positivo.

Se α for negativo, o sinal de Δ será o contrário do sinal de δ $-$

$(\beta/\alpha)\gamma$, logo Δ será positivo se, e somente se, w estiver abaixo de v.

Em qualquer caso ($\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$), Δ será positivo se, e somente se, o sentido da menor rotação que leva v em w for o sentido positivo, isto é, for o mesmo sentido da rotação de 90° que leva OX em OY.

Se $\alpha = 0$, então $\Delta = -\beta\gamma$. Neste caso, Δ será positivo se, e somente se, β e γ tiverem sinais contrários, isto é, se w estiver à esquerda de v quando v aponta para cima, ou à esquerda de v quando v aponta para baixo.

Ainda neste caso, temos $\Delta > 0$ se, e somente se, o sentido de rotação de v para w for o mesmo de OX para OY.

Em suma, o sinal do determinante cuja primeira coluna é v e cuja segunda coluna é w define matematicamente o sentido da menor rotação que leva v em w. (Este é o sentido oposto da menor rotação que leva w em v; isto corresponde ao fato de que o sinal do determinante se inverte quando se trocam as posições de suas linhas.)

A seguir, mostraremos como se pode obter diretamente a expressão $|\alpha\delta - \beta\gamma|$ para a área do paralelogramo construído sobre os vetores $v = (\alpha, \beta)$ e $w = (\gamma, \delta)$.

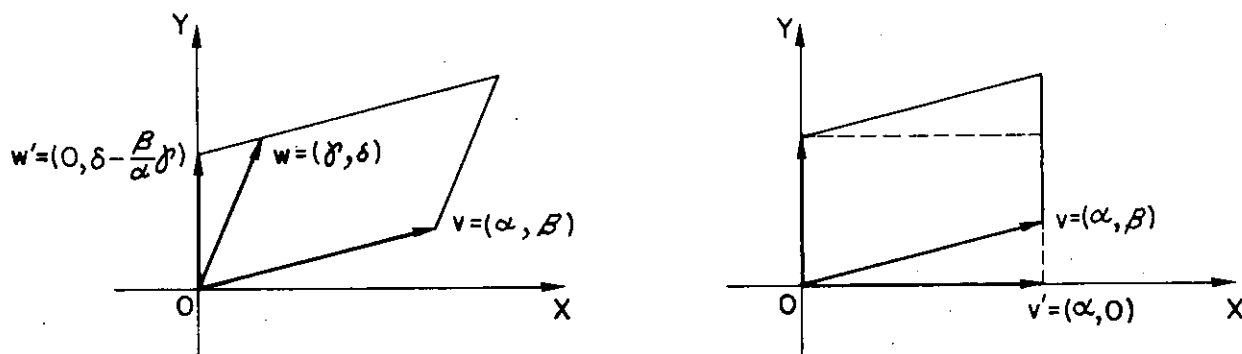



Fig. 22.4 - Os paralelogramos construídos sobre v e w, sobre v e w' ou sobre v' e w' têm todos a mesma área.

A reta paralela a v que passa pelo ponto (γ, δ) tem a equação

$$y = \delta + \frac{\beta}{\alpha}(x - \gamma).$$

Ela corta o eixo vertical no ponto em que $x = 0$. Logo esse ponto é a

extremidade do vetor

$$w' = \left(0, \delta - \frac{\beta}{\alpha}\gamma\right).$$

A área do paralelogramo dado é a mesma do paralelogramo construído sobre os vetores v e w'. (Mesma base e mesma altura.) Pela mesma razão, a área procurada é a área do retângulo cuja base é o vetor $v' = (\alpha, 0)$ e cuja altura é

$$w' = \left(0, \delta - \frac{\beta}{\alpha}\gamma\right).$$

A área deste retângulo é igual à sua base $|\alpha|$ vezes sua altura $|\delta - \frac{\beta}{\alpha}\gamma|$, logo é igual a $|\alpha\delta - \beta\gamma|$, como queríamos demonstrar.

Consideremos, a seguir, o triângulo com os vértices $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$. A área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo $ABDC$. Portanto

$$\text{área} \quad ABC = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

O sinal $+$ ou $-$ deve ser escolhido de modo que a área seja positiva (ou zero, se os pontos A, B e C forem colineares). O sinal do determinante será positivo se, e somente se, o sentido de rotação de AB para AC (mantendo A fixo) for o sentido positivo do sistema OXY, isto é, aquele da rotação de 90° que leva OX em OY.

A área do triângulo ABC pode ser fornecida por uma fórmula que trata as coordenadas de A, B e C de maneira mais simétrica, se introduzirmos o símbolo

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_0y_1 + x_1y_2 + x_2y_0 - x_1y_0 - x_2y_1 - x_0y_2,$$

onde se tomam positivamente os produtos dos termos das diagonais descendentes e negativamente os das diagonais ascendentes nas figuras abaixo:

$$+\begin{vmatrix} x_0 \searrow & x_1 \searrow & x_2 \searrow & x_0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_0 \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} x_0 & \nearrow x_1 & \nearrow x_2 & \nearrow x_0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_0 \end{vmatrix}.$$

Exemplo: A área do triângulo ABC, cujos vértices são $A = (2, 1)$,

$B = (4,3)$ e $C = (3,5)$ é igual a

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6 + 20 + 3 - 4 - 9 - 10) = 3$$

Como a área é igual a metade da base vezes a altura, e como a base AB é igual a $\sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$, concluímos que a altura do triângulo ABC relativa à base AB é $h = (2 \times \text{área}) \div \text{base} = 6 \div 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$.

23. Mudança de coordenadas

Em algumas situações é conveniente passar de um sistema de eixos ortogonais OXY para outro sistema $O'X'Y'$ no plano. Nesses casos, é necessário ter fórmulas que exprimam as coordenadas (x', y') de um ponto P no novo sistema $O'X'Y'$ em função das coordenadas (x, y) de P no sistema original OXY.

Começaremos exprimindo as coordenadas de um ponto em termos do produto interno de vetores.

Dado o sistema de eixos ortogonais OXY, sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ os vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente. Dizer que (x, y) são as coordenadas do ponto P no sistema OXY equivale a afirmar que

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2.$$

Tomando o produto interno de ambos os membros desta igualdade, primeiro por e_1 e depois por e_2, e observando que $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, obtemos

$$\langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle = x\langle e_1, e_1 \rangle + y\langle e_2, e_1 \rangle = x \quad \text{e} \quad \langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle = y.$$

Portanto as coordenadas de um ponto P num sistema de eixos ortogonais OXY são os produtos internos do vetor $\overrightarrow{OP}$ pelos vetores unitários dos eixos:

$$x = \langle \overrightarrow{OP}, e_1 \rangle \quad \text{e} \quad y = \langle \overrightarrow{OP}, e_2 \rangle.$$

Seja agora $O'X'Y'$ outro sistema de eixos ortogonais no plano. Chamemos de f_1 e f_2 respectivamente os vetores unitários de $O'X'$ e $O'Y'$. Sejam ainda (a, b) as coordenadas do ponto O' no sistema OXY e α o ângulo de que é preciso girar o eixo OX (no sentido positivo, isto é, que vai de OX para OY) para coincidir com $O'X'$. Então α é o ângulo de e_1 para f_1. Portanto

$$f_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot e_2.$$

Temos também

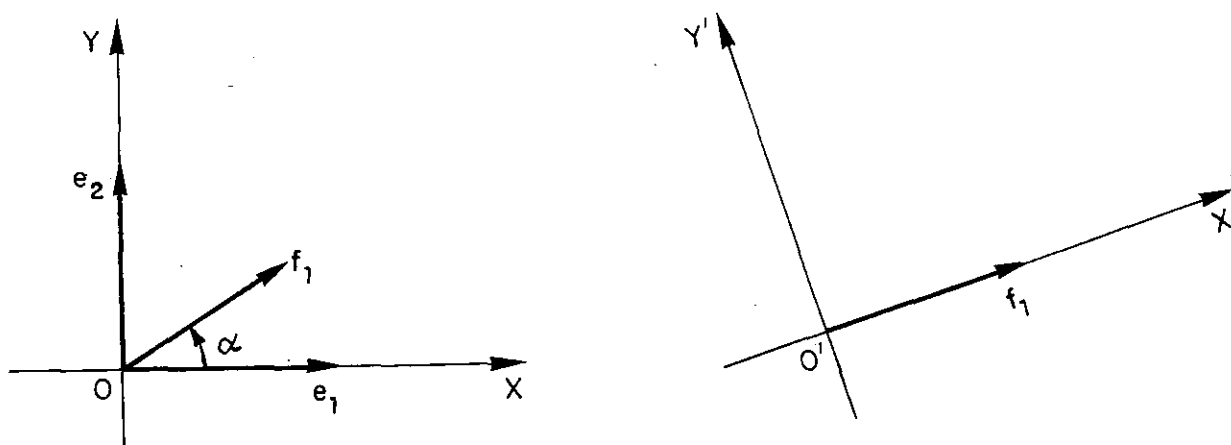



Fig. 23.1 - O ângulo α, entre os vetores e_1 e f_1.

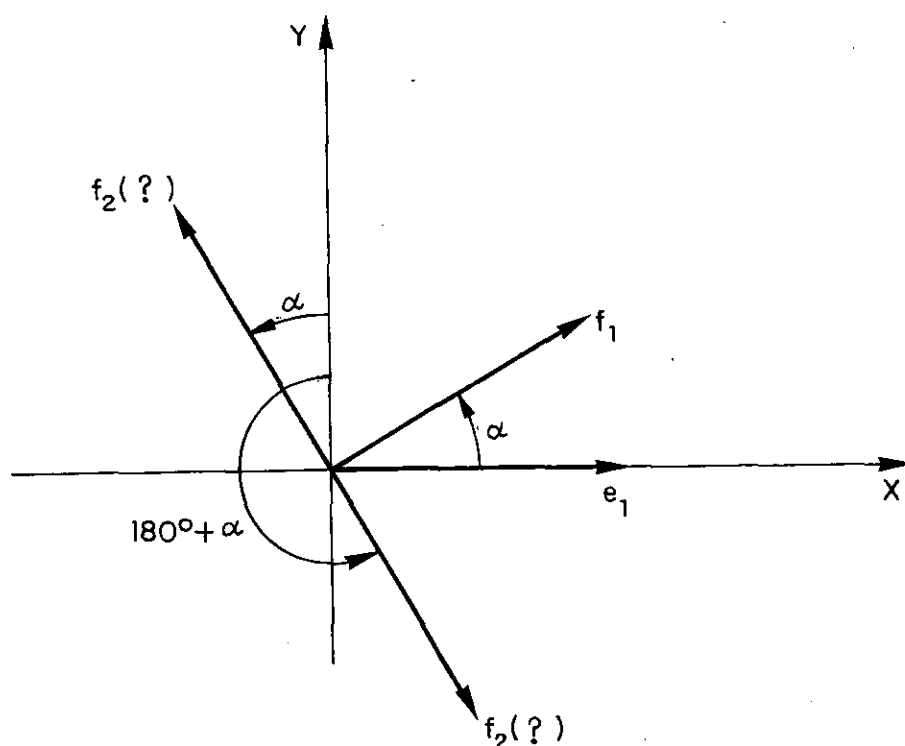



Fig. 23.2 - Como f_2 é perpendicular a f_1, o ângulo de e_2 para f_2 pode ser α ou $180^\circ + \alpha$.

$\overrightarrow{OO'} = ae_1 + be_2$. Logo

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x-a)e_1 + (y-b)e_2.$$

Segue-se que

$$x' = \langle \overrightarrow{O'P}, f_1 \rangle = \langle (x-a)e_1 + (y-b)e_2, \cos\alpha \cdot e_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot e_2 \rangle,$$

ou seja,

$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha.$$

Quanto a y', há 2 possibilidades. Pela nossa definição, α é o ângulo do vetor unitário e_1 para o vetor f_1. Como $e_1 \perp e_2$ e $f_1 \perp f_2$, o ângulo de e_2 para f_2 pode ser α ou pode ser $180° + \alpha$.

No primeiro caso, o sistema $O'X'Y'$ se obtém de OXY pela translação que leva O em O' (e desloca OX e OY paralelamente), seguida de uma rotação de ângulo α. Diz-se então que os sistemas $O'X'Y'$ e OXY são *igualmente orientados*, ou têm a *mesma orientação*.

No segundo caso, obtém-se $O'X'Y'$ a partir de OXY por meio da translação que leva O em O', seguida da rotação de ângulo α e, depois, de uma reflexão em torno do eixo $O'X'$. Então os sistemas OXY e $O'X'Y'$ têm *orientações opostas*.

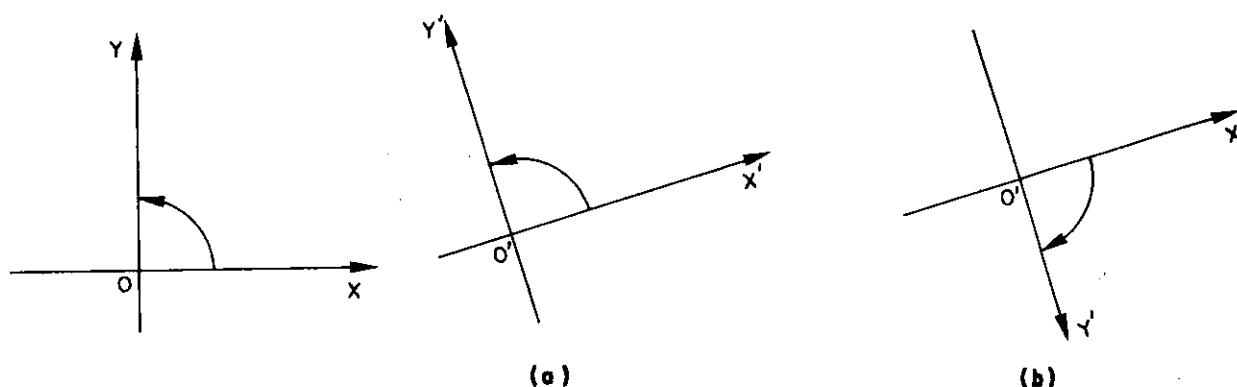



Fig. 23.3 - No caso (a), a mudança de eixos se faz por uma translação seguida de rotação. No caso (b), acrescenta-se uma reflexão.

Voltemos à nossa mudança de coordenadas. Se $O'X'Y'$ tem a mesma orientação que OXY então o vetor f_2 é obtido de e_2 por uma rotação de ângulo α, portanto

$$f_2 = -\operatorname{sen}\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2.$$

Daí segue-se, como acima, que

$$\begin{aligned} y' &= \langle \overrightarrow{O'P}, f_2 \rangle = \\ &= \langle (x-a)e_1 + (y-b)e_2, -\operatorname{sen}\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2 \rangle = \\ &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{aligned}$$

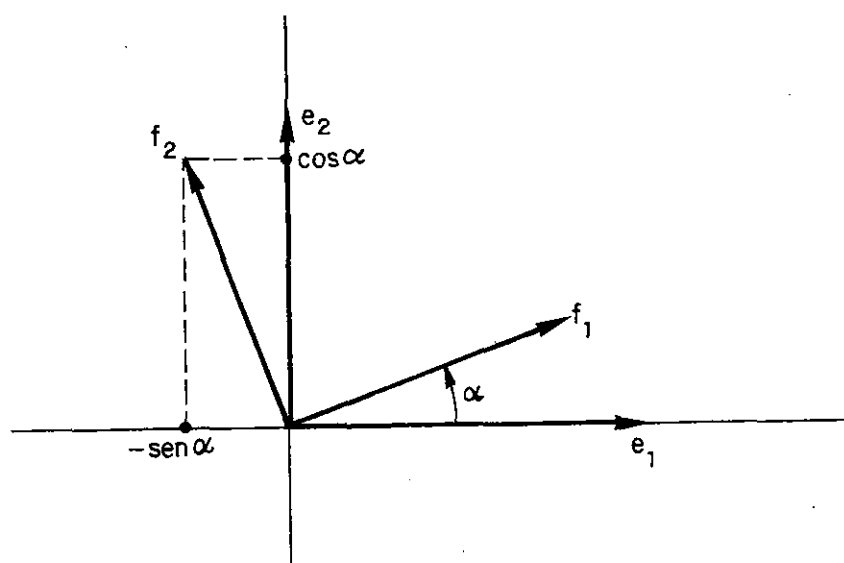



Fig. 23.4 - Submetendo os vetores e_1, e_2 a uma rotação de ângulo α, para obter f_1 e f_2.

Se, entretanto, o sistema $O'X'Y'$ tem orientação oposta à de OXY, então

$$f_2 = \operatorname{sen}\alpha \cdot e_1 - \cos\alpha \cdot e_2$$

e daí

$$y' = (x-a)\operatorname{sen}\alpha - (y-b)\cos\alpha.$$

Portanto, as fórmulas de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases} \tag{1}$$

ou:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = (x-a)\operatorname{sen}\alpha - (y-b)\cos\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

conforme o novo sistema $O'X'Y'$ seja igualmente orientado em relação ao sistema OXY anterior ou não. Nessas fórmulas, (a, b) são as coorde-

nadas da nova origem O' em relação a OXY e α é o ângulo da rotação positiva (relativamente a OXY) que leva o eixo OX no eixo $O'X'$.

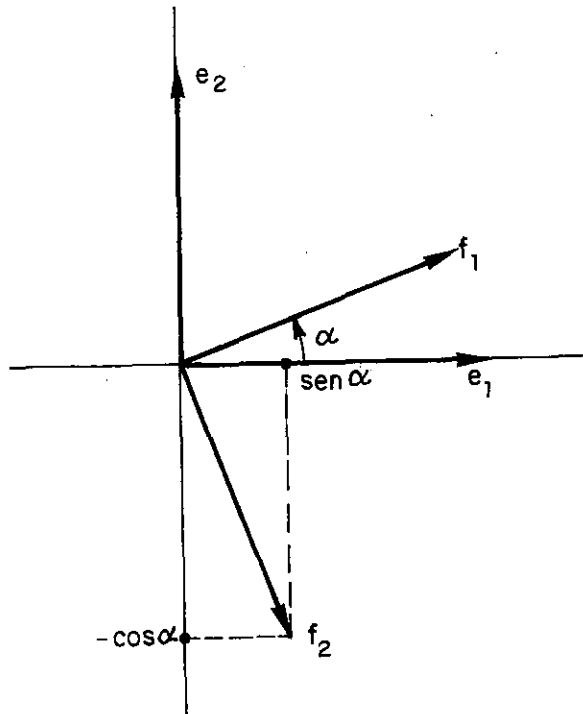



Fig. 23.5 - Neste caso, f_2 provém de e_2 por rotação de $180° + \alpha$.

As equações acima podem ser invertidas, para se obter (x, y) em função de (x', y'). Por exemplo, multiplicando a primeira equação em (1) por $\operatorname{sen}\alpha$, a segunda por $\cos\alpha$, somando as duas equações resultantes e observando que

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} x' \cdot \operatorname{sen}\alpha &= (x-a)\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}^2\alpha \\ y' \cdot \cos\alpha &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + (y-b)\cos^2\alpha \end{aligned}$$

e, por adição:

$$x' \cdot \operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha = y - b,$$

donde $y = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha + b$.

Multiplicando agora a primeira equação de (1) por $\cos\alpha$, a segunda por $-\operatorname{sen}\alpha$, somando e usando outra vez que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

obtemos

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a.$$

Procedendo de forma análoga, invertemos o sistema (2) e chegamos finalmente com as equações:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha + b \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha + y' \cdot \operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha - y' \cdot \cos\alpha + b. \end{cases} \qquad (4)$$

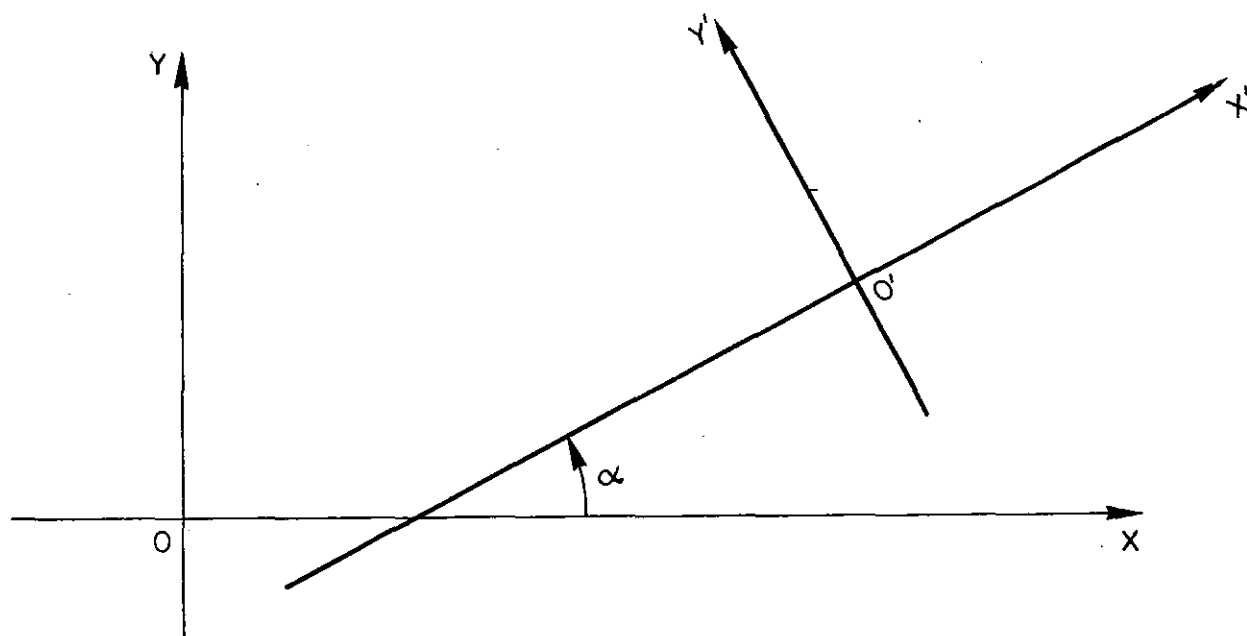



Fig. 23.6 - O ângulo α entre os eixos OX e $O'X'$.

Estas fórmulas permitem obter de volta as coordenadas (x, y) do ponto P no sistema OXY em função das coordenadas (x', y') do mesmo ponto no sistema $O'X'Y'$. A primeira delas se aplica quando os dois sistemas são igualmente orientados e a segunda quando OXY e $O'X'Y'$ têm orientações opostas (além de translação e rotação, é preciso uma reflexão para passar de um para o outro).

As diferenças entre as fórmulas (1), (2), de um lado, e (3), (4) de outro são uma mudança de sinal na segunda equação de (3) e as posições de a e b. Estes números são as coordenadas de O' no sistema OXY. Se tivéssemos tomado a e b como as coordenadas de O no sistema $O'X'Y'$, os papéis destas constantes nos dois grupos de equações se inverteriam.

Vejamos agora o efeito de uma mudança de eixos coordenados sobre a equação de uma curva do plano. Dada a equação $f(x,y) = 0$ no sistema original OXY, desejamos obter uma equação $g(x',y') = 0$ a ser satisfeita pelas coordenadas x' e y' no sistema $O'X'Y'$. Para tal, basta substituir x e y na equação original por suas expressões em termos de x' e y'.

Exemplo 1. Consideremos a curva de equação $x^2 + 4y^2 = 4$. Esta equação pode ser escrita na forma $x^2/4 + y^2/1 = 1$ e portanto representa uma elipse, como vimos no Exemplo 4 da seção 4 (figura 23.7). Vejamos o que ocorre com esta equação ao se efetuar uma mudança de eixos que consiste em uma rotação de 45°.

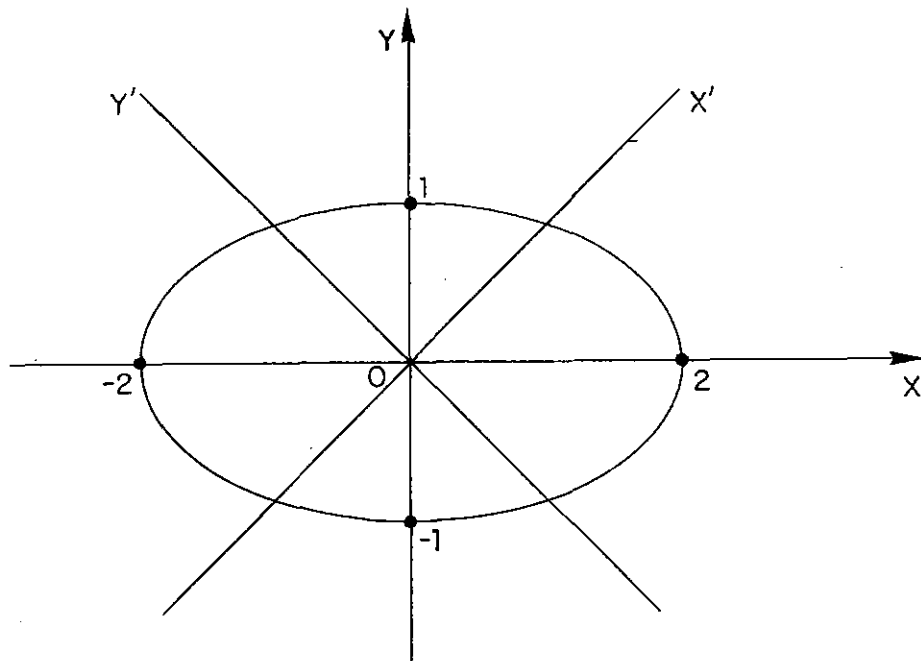



Fig. 23.7 - Mudando o sistema de eixos.

De acordo com a fórmula (3) desta seção, as novas coordenadas x' e y' de um ponto do plano se obtêm das antigas coordenadas x e y por meio das expressões

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Substituindo estas expressões na equação original, obtemos:

$$\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4,$$

ou seja

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - x'y' + 2x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 = 4$$

e finalmente

$$\frac{5x'^2}{2} + \frac{9y'^2}{2} + 3x'y' = 4 \tag{5}$$

Observe que a equação se torna mais complexa do que antes, dificultando seu reconhecimento. Não é mais evidente que a equação (5) represente uma elipse. A maior aplicação de mudança de eixos em Geometria Analítica consiste justamente em procurar tornar mais simples a equação de uma curva, permitindo reconhecê-la com mais facilidade. Vejamos um exemplo ilustrando esse método.

Exemplo 2. Foi afirmado na seção 5 (vide Exemplo 2) que a curva $y = ax^2+bx+c$ (com $a \neq 0$) é uma parábola. Isto se mostra tomando no plano um novo sistema de eixos ortogonais em relação ao qual a equação dessa curva assume a forma $y' = a(x')^2$. O novo sistema $O'X'Y'$ se obtém do anterior por translação, pondo a origem O' no ponto de coordenadas (h, k), onde h e k devem ser escolhidos de modo a eliminar os termos de grau menor do que 2 no trinômio dado. Então devemos ter $y = y' + k$, $x = x' + h$, logo

$$\begin{aligned} y' + k &= a(x' + h)^2 + b(x' + h) + c = \\ &= a \cdot x'^2 + (2ah + b)x' + h^2 + bh + c. \end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos $h = -b/2a$ e $k = h^2 + bh + c$, teremos

$$y' = a \cdot x'^2.$$

Isto significa que, deslocando paralelamente o sistema OXY de modo que a origem O caia no ponto $O' = (h, k)$ onde $h = -b/2a$ e $k = h^2 + bh + c$, a curva cuja equação era $y = ax^2 + bx + c$ no sistema original passa a ter equação $y' = a \cdot x'^2$ no novo sistema, logo é uma parábola.

Os exercícios desta seção propõem outros casos de simplificação de equações.

Exercícios da Segunda Parte

18.1 Dados os vetores u e v, prove que as afirmações seguintes são equivalentes:

(a) Uma combinação linear $\alpha u + \beta v$ só pode ser igual a zero quando $\alpha = \beta = 0$.
(b) Se $\alpha u + \beta v = \alpha' u + \beta' v$ então $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$.
(c) Nenhum dos vetores u e v é múltiplo do outro.
(d) Se $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ então $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.
(e) Todo vetor do plano é combinação linear de u e v.

18.2 Exprima o vetor $w = (1,1)$ como combinação linear de $u = (-2,1)$ e $v = (1,-1)$.

18.3 Prove que a soma dos vetores com origem no centro de um polígono regular e extremidades nos vértices desse polígono é igual a zero.

18.4 Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

18.5 Seja G o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

18.6 Sejam u, v, w vetores tais que v é múltiplo de u mas w não é. Se $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, prove que $\gamma = 0$ e $\alpha u + \beta v = 0$.

18.7 Seja P um ponto interior ao triângulo ABC tal que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$. Prove que as retas AP, BP e CP são medianas de ABC, logo P é o baricentro desse triângulo.

19.1 Dados os vetores arbitrários u e v, mostre que $|u| \cdot v$ e $|v| \cdot u$ são vetores do mesmo comprimento.

19.2 Mostre que se os vetores u e v têm o mesmo comprimento então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais.

19.3 Sejam $u = \overrightarrow{OP}$, $v = \overrightarrow{OQ}$ vetores não-nulos tais que $|u|v + |v|u = \overrightarrow{OR}$ também seja diferente de zero. Prove que OR é a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$. Obtenha, a partir daí, a inclinação dessa bissetriz em função das coordenadas dos pontos P e Q num sistema de eixos ortogonais arbitrário OXY.

19.4 Dado o paralelogramo $ABDC$, ponha $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AC} = v$, logo $\overrightarrow{AD} = u + v$ e $\overrightarrow{BC} = v - u$. Prove que $|u - v|^2 + |u + v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$ e conclua que em todo paralelogramo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos quatro lados.

19.5 Se os vetores u, v e $u - v$ têm comprimentos iguais aos dos vetores u_1, v_1 e $u_1 - v_1$ respectivamente, prove que $\langle u, v\rangle = \langle u_1, v_1\rangle$. Conclua daí que se os lados do triângulo ABC são iguais aos lados do triângulo $A_1B_1C_1$ então os ângulos também são iguais.

19.6 Logo em seguida à definição do produto interno de dois vetores foi feita uma lista de seis propriedades que resultam imediatamente da definição dada. Quais dessas seis propriedades se manteriam ainda válidas se o produto interno de u por v fosse definido como igual a $|u| \cdot |v|$?

19.7 O comprimento $|v| = |\overrightarrow{AB}|$ do vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é a distância $\mathrm{d}(A, B)$ entre as extremidades do segmento AB. Relativamente a um sistema de eixos OXY, se as coordenadas de A são (x, y) e as de B são (x', y') então os números $\alpha = x' - x$ e $\beta = y' - y$ são chamados as coordenadas do vetor v. Então $|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Prove:

(1) $|v| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
(2) $|v + w| \leq |v| + |w|$.
(3) $|\lambda \cdot v| = |\lambda||v|$.
(4) $|-v| = |v|$.

19.8 Prove que $\langle u, v\rangle = \pm|u||v|$ se, e somente se, um dos vetores u, v é múltiplo do outro. Em seguida, compare $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle$ com $(|u| + |v|)^2$ para concluir que $|u + v| = |u| + |v|$ se, e somente se, um dos vetores u, v é zero ou é um múltiplo positivo do outro.

19.9 Indicando genericamente por v^* o vetor obtido de v por rotação positiva de 90°, prove que $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$ e $\langle u, v^*\rangle + \langle u^*, v\rangle = 0$ para quaisquer vetores u, v do plano e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

19.10 Dados quatro pontos quaisquer A, B, C e D no plano, ponha $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$, $w = \overrightarrow{CD}$, portanto $u + v = \overrightarrow{AC}$, $v + w = \overrightarrow{BD}$ e $u + v + w = \overrightarrow{AD}$. Conclua então que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0.$$

Suponha, em seguida, que D seja o ponto de encontro das alturas do triângulo ABC que partem dos vértices B e C, de modo que $AB \perp CD$ e $AC \perp DB$. Deduza que AD é perpendicular a BC e conclua daí que as três alturas do triângulo ABC se encontram no mesmo ponto D.

20.1 Sejam A, B, C pontos do plano e α, β números reais, com $\alpha + \beta = 1$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $C = \alpha A + \beta B$;

(b) Para todo ponto O do plano, tem-se $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$.

(c) Para algum ponto P do plano tem-se $\overrightarrow{PC} = \alpha \cdot \overrightarrow{PA} + \beta \cdot \overrightarrow{PB}$

(d) $\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AB}$

20.2 Se $\alpha A + \beta B = C$ e $\alpha A_1 + \beta B_1 = C_1$, com $\alpha + \beta = 1$, prove que se tem $\alpha \cdot \overrightarrow{AA_1} + \beta \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$

20.3 Se os segmentos de reta AB^* e $A_1B_1^*$ são obtidos respectivamente dos segmentos AB e A_1B_1 por rotação positiva de 90° e é dado o número t, com $0 \leq t \leq 1$, prove que, pondo $A_0 = (1-t)A + tA_1$, $B_0 = (1-t)B + tB_1$ e $B_0^* = (1-t)B^* + tB_1^*$, o segmento $A_0B_0^*$ é obtido de A_0B_0 por rotação positiva de 90*.

20.4 Um subconjunto X do plano chama-se *convexo* quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X. Noutras palavras, X é convexo quando para quaisquer $P, Q \in X$ e $t \in [0, 1]$ tem-se $(1-t)P + tQ \in X$. Prove: O *disco* D de centro num ponto A e raio r é um conjunto convexo. (Por definição, D é formado pelos pontos P tais que $|\overrightarrow{AP}| \leq r$.)

20.5 A interseção $X \cap Y$ de dois conjuntos convexos X e Y é um conjunto convexo.

20.6 Seja X convexo. Se $x, y, z \in X$ e α, β, γ são números ≥ 0 com $\alpha + \beta + \gamma = 1$ então $\alpha x + \beta y + \gamma z \in X$.

20.7 Se X e Y são convexos então a reunião dos segmentos de reta que ligam um ponto qualquer de X a um ponto qualquer de Y é um conjunto convexo.

20.8 Dados a, b não simultaneamente iguais a zero, e c qualquer, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $ax + by \geq c$ é convexo.

20.9 O conjunto Z dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem as condições $x > 0$ e $y \geq 1/x$ é convexo.

20.10 O conjunto W dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem $y \geq x^2$ é convexo.

20.11 Se X um subconjunto não-vazio do plano Π tal que a combinação afim de dois pontos quaisquer de X é ainda um ponto de X. Prove que se X contiver três pontos não-colineares então X contém todos os pontos do plano. Conclua daí que ou X se reduz a um único ponto, ou é uma reta ou é todo o plano Π.

21.1 Fixada uma reta r, indiquemos com v' a projeção ortogonal de um vetor arbitrário v sobre r. Prove as seguintes propriedades:

(a) $(v + w)' = v' + w'$

(b) $(v')' = v'$

(c) $\langle v, w' \rangle = \langle v', w \rangle$

21.2 Suponha dada uma correspondência que associa a cada vetor v do plano um vetor v' com as propriedades a), b), c) do exercício anterior. Prove que só há 3 possibilidades: ou $v' = 0$ para todo v, ou $v' = v$ para todo v ou existe uma reta r tal que, para todo v, v' é a projeção ortogonal de v sobre r.

21.3 Sejam r e s duas retas concorrentes no plano. Se as projeções ortogonais dos vetores u e v sobre essas retas são iguais, prove que $u = v$.

21.4 Sejam A, B e C pontos do plano. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$

(2) As retas AB e BC são perpendiculares.

Conclua que se B é o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta r então o produto interno $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ independe do ponto C tomado sobre r.

22.1 Calcule a área do triângulo no qual cada um dos vértices está sobre duas das retas $x+y=0$, $x-y=0$ e $2x+y=3$.

22.2 Atribua um significado ao símbolo

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

de modo que $\pm A/2$ seja a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4). Generalize para um polígono de n lados.

22.3 Calcule a área do pentágono cujos vértices são os pontos $(-2,3)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,3)$ e $(0,5)$.

22.4 Chama-se *área orientada* do triângulo ABC à área do triângulo ABC precedida de um sinal $+$ ou $-$, conforme o sentido de percurso $A \rightarrow B \rightarrow C$ coincida ou não com a orientação positiva do plano. A área orientada $w(ABC)$ é fornecida por um determinante, como foi visto no texto. Prove: Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$ então $w(ABC) = w(AB_1C) + w(AB_2C)$.

22.5 A área orientada do paralelogramo construído sobre os vetores $u + v$ e w é igual à soma das áreas orientadas dos paralelogramos construídos sobre os vetores u, v e u, w.

22.6 Seja O um ponto do plano, interior ou exterior ao triângulo ABC (porém não situado sobre qualquer dos lados desse triângulo). Prove que $w(ABC) = w(OAB) + w(OBC) + w(OCA)$.

22.7 Generalize o exercício anterior para um polígono qualquer do plano.

22.8 Calcule a área do triângulo ABC cujos vértices são $A = (1,1)$, $B = (2,3)$ e $C = (4,0)$. Em seguida, calcule as distâncias $\mathrm{d}(A,B)$, $\mathrm{d}(A,C)$ e $\mathrm{d}(B,C)$. A partir daí, determine as medidas das alturas desse triângulo.

23.1 Submetendo o sistema de eixos coordenados OXY a uma rotação de ângulo θ em torno da origem O, obtém-se um novo sistema OX_1Y_1. As antigas coordenadas (x,y) e as novas coordenadas (u,v) relacionam-se pelas equações $x = au - bv$, $y = bu + av$, onde $a = \cos\theta$ e

$b = \text{sen}\,\theta$, logo $a^2 + b^2 = 1$. A curva definida pela equação do segundo grau completa

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

exprime-se, nas novas coordenadas, como

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0,$$

onde se tem: $A' = Aa^2 + Bab + Cb^2$, $B' = -2Aab + B(a^2 - b^2) + 2Cab$ e $C' = Ab^2 - Bab + Ca^2$. Escrevendo $\alpha = 2ab$ e $\beta = a^2 - b^2$, resulta que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. (Na realidade, $\beta = \cos 2\theta$, $\alpha = \text{sen}\,2\theta$, mas isto não será usado agora.) Tem-se então

$$A' = Aa^2 + (B/2)\alpha + Cb^2,$$
$$B' = -A\alpha + B\beta + C\alpha$$

e

$$C' = Ab^2 - (B/2)\alpha + Ca^2.$$

Efetuando as multiplicações e simplificando, mostre que $(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. Portanto o discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ permanece invariante por rotação em torno da origem.

23.2 Submetendo-se o sistema de eixos OXY a uma translação, obtém-se um novo sistema $O_1X_1Y_1$, no qual as coordenadas (u, v) se relacionam com as antigas coordenadas (x, y) pelas equações $x = u + h$, $y = v + k$, onde (h, k) são as coordenadas do ponto O_1 no sistema OXY. Prove que a curva definida pela equação $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ no sistema OXY tem nova equação $Au^2+Buv+Cv^2+D'u+E'v+F' = 0$, onde os coeficientes A, B e C são os mesmos. Em particular, o discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ é invariante por translação. Conclua que Δ é invariante por qualquer mudança de eixos que preserve orientação. Mostre ainda que Δ permanece invariante, mesmo que a mudança de eixos inverta a orientação.

23.3 Seja a curva de equação $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$.

(a) Se $A = C$, mostre que a rotação de 45° em torno de O introduz coordenadas (u, v), nas quais a equação da curva é $A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0$, sem termo em uv.

(b) Se $A \neq C$, a rotação de ângulo θ em torno de O, com $\operatorname{tg} 2\theta = B/(A - C)$ introduz coordenadas (u, v) nas quais a equação da curva não possui termo em uv.

23.4 Seja a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde o termo em xy foi eliminado por uma rotação de eixos (sem alterar o discriminante Δ). Prove:

(a) Se $\Delta = -4AC = 0$ esta equação representa uma reta, duas retas paralelas ou uma parábola;

(b) Se $\Delta = -4AC \neq 0$ a translação de eixos $x = u + h$, $y = v + k$, com $h = -D/2A$, $k = -E/2C$ dá à equação a forma $Au^2 + Cv^2 + F' = 0$, logo a curva é uma elipse, uma circunferência, um ponto, o conjunto vazio, uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

23.5 Use os exercícios anteriores para concluir que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $\Delta = B^2 - 4AC$, representa:

(a) Uma parábola, um par de retas paralelas ou uma única reta, se $\Delta = 0$;

(b) Uma hipérbole ou um par de retas concorrentes se $\Delta > 0$;

(c) Uma elipse, ou uma circunferência, ou um único ponto, ou o conjunto vazio, se $\Delta < 0$.

23.6 Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A \neq C$, observe que, conhecida $\operatorname{tg} 2\theta = B/(A - C)$, pode-se sempre supor que 2θ pertence ao primeiro ou ao segundo quadrante, logo θ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{sen} 2\theta$ é positivo, portanto o sinal de $\cos 2\theta = \pm 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}$ é o mesmo de $\operatorname{tg} 2\theta$, ou seja, de $B/(A - C)$. Conhecendo $\cos 2\theta$, determinam-se $\cos\theta = \sqrt{(1 + \cos 2\theta)/2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{(1 - \cos 2\theta)/2}$. Aplique estas considerações à equação $x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - y + 1 = 0$ para obter um novo sistema de eixos no qual a curva por ela definida tenha uma equação desprovida de termos em xy, em x e em y. Qual é esta equação e que curva ela representa?

23.7 Identifique, para cada uma das equações abaixo, o conjunto dos pontos do plano por ela definido:

(a) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

(b) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 5 = 0$

(c) $-x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$

(d) $2x^2 - 3y^2 + 4x - y + 3 = 0$

(e) $2x^2 - 3y^2 + 4x - y + 23/12 = 0$.

23.8 Qual é o conjunto X, formado pelos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem cada uma das equações abaixo?

(a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x - 15y + 1 = 0$
(b) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$
(c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y + 2 = 0$
(d) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 1 = 0$.

23.9 Ache, por meio de uma translação, um novo sistema de eixos no qual a curva $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ seja representada por uma equação desprovida de termos em x e em y. Identifique a curva.

23.10 Mostre que não há translação de eixos capaz de eliminar ambos os termos de primeiro grau na equação $x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y + 1 = 0$.

23.11 Para cada uma das equações abaixo, determine o tipo de conjunto que a equação define:

(a) $xy = 0$.
(b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0$.
(c) $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 1 = 0$.
(d) $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

23.12 Determine a curva definida por cada uma das equações abaixo.

(a) $u^2 - v^2 + uv - 2 = 0$.
(b) $9u^2 + 20v^2 - \sqrt{3} \cdot uv - 4 = 0$

23.13 Prove que uma mudança de eixos ortogonais deixa invariante o "traço" $A + C$ na curva $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

23.14 (Outro método para identificar as curvas do segundo grau.) Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$, ponha $m = A + C$ e $n = AC - B^2/4$.

(a) Mostre que as raízes λ_1, λ_2 da equação $\lambda^2 - m\lambda + n = 0$ são números reais.
(b) Prove que $\lambda_1 = \lambda_2$ se, e somente se, $A = C$ e $B = 0$.
(c) Mostre que o sistema $Ax + (B/2)y = \lambda_1 x$, $(B/2)x + Cy = \lambda_1 y$ é indeterminado e conclua que existe um vetor unitário $f_1 = (a, b)$ tal que $Aa + (B/2)b = \lambda_1 a$, $(B/2)a + Cb = \lambda_1 b$.
(d) Use a relação $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ para concluir que o vetor unitário $f_2 = (-b, a)$, ortogonal a f_1, cumpre as condições $A(-b)+$

$+(B/2)a = \lambda_2(-b)$ e $(B/2)(-b) + Ca = \lambda_2 \cdot a$.

(e) Sejam OX_1 e OY_1 os eixos ortogonais cujos vetores unitários são f_1 e f_2 respectivamente. Mostre que a rotação que leva os eixos originais OXY em OX_1Y_1 transforma a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ em $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + F = 0$, onde $x = au - bv$, $y = bu + av$.

(f) Use este método para resolver o exercício 23.12.

Terceira Parte

Transformações Geométricas

24. Transformações no plano

Uma *transformação* T no plano Π é uma função $T\colon \Pi \to \Pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua *imagem* por T.

Nas próximas seções estudaremos transformações do plano com propriedades geométricas importantes e examinaremos essas propriedades.

Lembremos que a transformação $T\colon \Pi \to \Pi$ diz-se *injetiva* quando pontos distintos $P \neq Q$ em Π têm sempre imagens distintas $T(P) \neq T(Q)$. Noutras palavras, T é injetiva quando $T(P) = T(Q)$ implica $P = Q$. T diz-se *sobrejetiva* quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P, ou seja, para todo P_1 em Π existe P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Uma transformação $T\colon \Pi \to \Pi$ chama-se *bijetiva*, ou uma *bijeção*, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Isto significa que para todo ponto P_1 em Π existe um único ponto P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Uma transformação bijetiva $T\colon \Pi \to \Pi$ possui uma inversa $T^{-1}\colon \Pi \to \Pi$. Para todo ponto P_1 em Π, sua imagem $T^{-1}(P_1)$ pela inversa T^{-1} é o único ponto P de Π tal que $T(P) = P_1$.

Dadas duas transformações $S, T\colon \Pi \to \Pi$, a *composta* $S \circ T\colon \Pi \to \Pi$ é a transformação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $S(T(P))$. Portanto, por definição, $(S \circ T)(P) = S(T(P))$. Ou seja, $S \circ T$ consiste em aplicar primeiro T e depois S.

Uma transformação particular é a *transformação identidade* $\mathrm{Id}\colon \Pi \to \Pi$. Por definição, tem-se $\mathrm{Id}(P) = P$ para todo ponto P em Π.

Dada uma bijeção $T\colon \Pi \to T$, tem-se

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id},$$

pois

$$T(T^{-1}(P_1)) = T(P) = P_1 \quad \text{e} \quad T^{-1}(T(P)) = T^{-1}(P_1) = P.$$

Uma vez que um sistema de coordenadas em Π tenha sido estabelecido, uma transformação T pode ser descrita por suas *equações*, isto é,

pelas expressões das coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P_1 = T(P)$, obtido pela aplicação de T ao ponto $P = (x, y)$.

Exemplo: Tomemos a transformação T descrita pelas equações

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Tal transformação é denominada uma *compressão* vertical do plano. Aplicada a um ponto (x, y) do plano, ela preserva a abcissa x e reduz sua ordenada à metade, provocando um efeito de comprimir verticalmente as figuras planas. (Fig. 24.1)

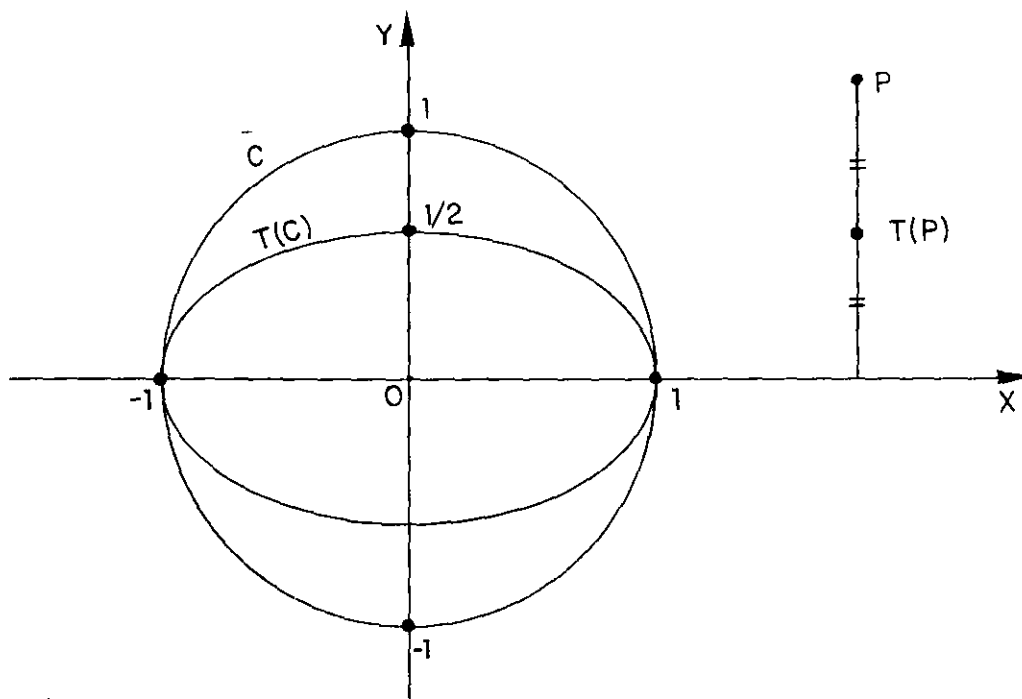



Fig. 24.1 - Uma compressão vertical do plano.

Vemos imediatamente que T é *injetiva* e *sobrejetiva*: dado um ponto (x_1, y_1) do plano, ele é imagem de exatamente um ponto (x, y) do plano, com coordenadas dadas por $x = x_1$ e $y = 2y_1$.

Na figura 24.1 estão representados a circunferencia unitária C, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e o resultado $T(C)$ de sua compressão vertical. Para obter a equação de $T(C)$ aplicamos a mesma técnica usada para obter a equação de uma figura após uma mudança de eixos: substituímos, na equação de C, as coordenadas x e y por suas expressões em termos de x_1 e y_1. No presente caso, temos $x = x_1$ e $y = 2y_1$, como vimos no

parágrafo anterior. Logo, a equação de $T(C)$ é:

$$x_1^2 + (2y_1)^2 = 1, \quad \text{ou seja,} \quad x_1^2 + 4y_1^2 = 1.$$

Facilmente reconhecemos a equação $T(C)$ como sendo a de uma elipse de semi-eixos $a = 1$ e $b = 1/2$. Este é um resultado geral: o resultado de uma compressão do plano sobre uma circunferencia é uma elipse cujo eixo maior é igual ao diametro da circunferencia. Na verdade, como veremos em seção posterior, a propriedade de transformar círculos em elipses é satisfeita por uma classe mais ampla de transformações, chamadas de transformações afins do plano.

25. Isometrias no plano

Uma *isometria* do plano Π é uma transformação $T: \Pi \to \Pi$ que preserva distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria quando se tem

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos P, Q no plano Π.

No que se segue, veremos diversos exemplos de isometrias. Agora vamos estabelecer algumas propriedades fundamentais desse tipo de transformações.

Toda isometria $T: \Pi \to \Pi$ é injetiva.

Com efeito, se $T(P) = T(Q)$ então

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0,$$

logo $P = Q$.

Sejam $T: \Pi \to \Pi$ uma isometria e P, Q pontos distintos de Π. Se $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$ então T transforma todo ponto R do segmento PQ num ponto R_1 do segmento P_1Q_1.

Com efeito, como R pertence ao segmento PQ, temos

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q).$$

Sendo T uma isometria, temos $d(P_1, Q_1) = d(P, Q), d(P_1, R_1) = d(P, R)$ e $d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$. Logo

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1).$$

Portanto R_1 pertence ao segmento de reta P_1Q_1.

A propriedade acima diz que toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares e, mais ainda, preserva a ordenação desses pontos colineares. Daí resulta a propriedade seguinte.

A imagem de uma reta r por uma isometria T é uma reta $r_1 = T(r)$.

Com efeito, sejam P, Q pontos distintos de r e $P_1 = T(P)$, $Q_1 = T(Q)$ suas imagens por T. Chamemos de r_1 a reta que passa pelos pontos

P_1 e Q_1. Dado qualquer outro ponto R na reta r, afirmamos que sua imagem $R_1 = T(R)$ deve pertencer à reta r_1. Para ver isto, suponhamos, para fixar as idéias, que Q esteja entre P e R, isto é, que Q pertença ao segmento PR. Então, como acabamos de ver, Q_1 está no segmento de reta P_1R_1, logo R_1 pertence à reta r_1 que liga P_1 a Q_1. Os casos em que P está entre Q e R ou está entre P e Q se tratam igualmente.

Acabamos de mostrar que os pontos da reta r são transformados pela isometria T em pontos da reta r_1.

Reciprocamente, se R_1 é um ponto da reta r_1 suponhamos, para fixar idéias, que P_1 esteja entre R_1 e Q_1, ou seja, que P_1 pertença ao segmento de reta R_1Q_1. Seja R o ponto da reta r, situado à esquerda do segmento PQ e tal que $d(R,Q) = d(R_1,Q_1)$. Então $T(R)$ é o ponto de r_1, à esquerda do segmento P_1Q_1 e tal que $d(T(R),Q_1) = d(R_1,Q_1)$, logo $T(R) = R_1$. Assim, todos os pontos da reta r_1 são imagens por T de pontos da reta r. Isto concluí a prova de que $T(r) = r_1$.

Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.

Com efeito, se $T: \Pi \to \Pi$ é uma isometria e as retas r, s do plano Π são paralelas, suas imagens $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ devem ser paralelas, pois se existisse um ponto P_1 ao mesmo tempo em r_1 e em s_1 teríamos $P_1 = T(P)$, com P em r e $P_1 = T(Q)$, com Q em s. Sendo T injetiva, isto obrigaria $P = Q$, e então as retas r e s teriam um ponto $P = Q$ em comum, contradizendo o fato de que são paralelas.

Atenção: A propriedade acima *não* significa que T transforma qualquer reta r numa reta $T(r) = r_1$ paralela a r.

Toda isometria transforma um triângulo retângulo noutro triângulo retângulo.

Com efeito, sejam $T: \Pi \to \Pi$ uma isometria e ABC um triângulo, retângulo em A. Pondo $A_1 = T(A)$, $B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$, o Teorema de Pitágoras assegura que

$$d(B,C)^2 = d(A,B)^2 + d(A,C)^2.$$

Como T preserva distâncias, segue-se daí que

$$d(B_1,C_1)^2 = d(A_1,B_1)^2 + d(A_1,C_1)^2.$$

Noutras palavras, as isometrias transformam retas perpendiculares em retas perpendiculares, ou seja, preservam ângulos retos.

Mais geralmente, dado qualquer ângulo $\widehat{BAC}$, sejam $A_1 = T(A), B_1 = T(B)$ e $C_1 = T(C)$. Os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ têm lados iguais pois T preserva distâncias. Logo têm ângulos iguais. Em particular, $B_1\widehat{A_1}C_1 = \widehat{BAC}$. Portanto:

Uma isometria preserva quaisquer ângulos.

As isometrias mais simples são as *translações*. A translação $T_v \colon \Pi \to \Pi$, determinada pelo vetor v, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$. Como sabemos, se $v = \overrightarrow{AB}$ então $P + v = Q$ é o ponto tal que o segmento orientado PQ é equipolente a AB.

Se, num dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de v são (α, β) então, para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.

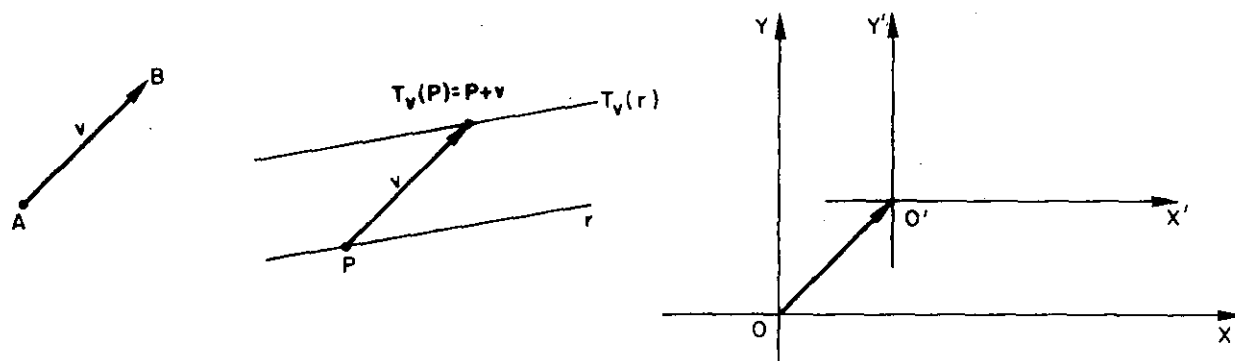



Fig. 25.1 - A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, OX e OY.

A translação T_v transforma toda figura F numa figura $T_v(F) = F'$, cujos pontos $P + v$ são obtidos transladando-se os pontos P de F pelo mesmo vetor v. Em particular, uma reta r é transformada na reta

$$T_v(r) = r + v = \{P + v; P \in r\},$$

a qual é paralela a v. Um sistema de eixos ortogonais OX e OY é transformado por T_v no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido que, OX e OY.

De um modo geral, qualquer isometria T transforma um sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$. *Além disso, T transforma um ponto qualquer P do plano noutro ponto $P_1 = T(P)$, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são as mesmas coordenadas de P no sistema OXY.*

Segue-se imediatamente que toda isometria T é uma transformação sobrejetiva. Como já vimos que T é injetiva, concluímos que T é uma bijeção. Sua inversa T^{-1} é evidentemente uma isometria.

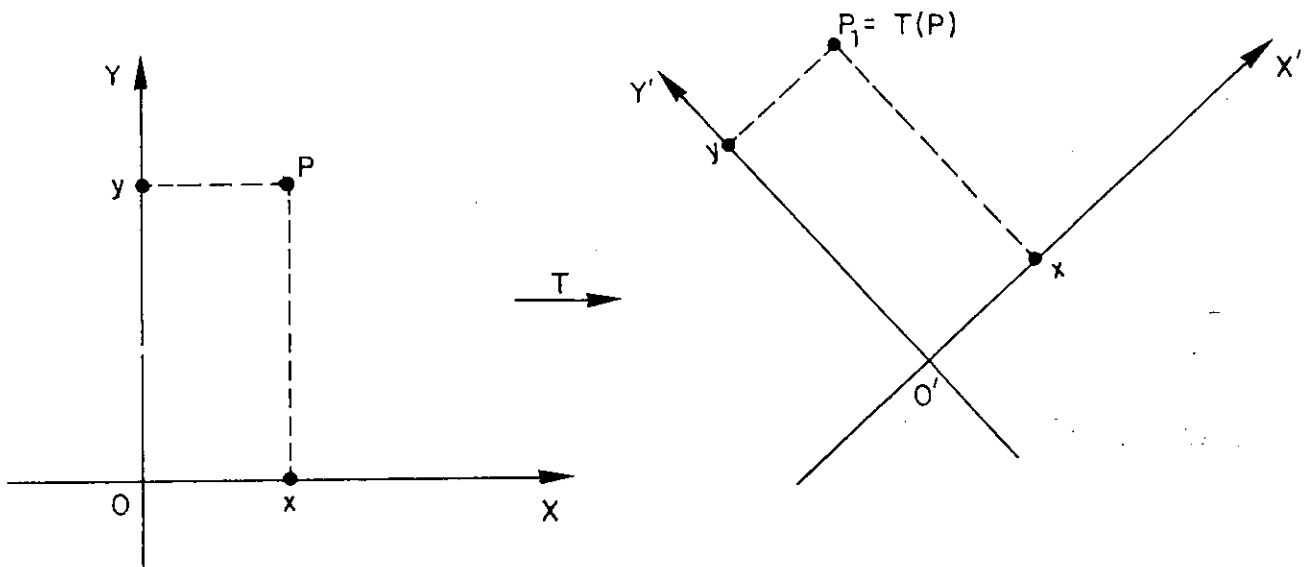



Fig. 25.2 - As coordenadas de $P_1 = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais às coordenadas de P no sistema OXY.

Sejam (a, b) as coordenadas de $O' = T(O)$ no sistema OXY e α o ângulo de OX para $O'X'$. Usando as fórmulas (3) e (4) da seção 23, vemos que as coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P_1 = T(P)$ no sistema OXY são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha + a \\ y_1 = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha + b \end{cases} \tag{1}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha + a \\ y_1 = x \cdot \operatorname{sen}\alpha - y \cdot \cos\alpha + b \end{cases} \tag{2}$$

conforme OXY e $O'X'Y'$ sejam igualmente orientados ou não. No primeiro caso, diz-se que T *preserva* e, no segundo, que T *inverte* a orientação do plano.

Assim, quando se fixa um sistema de eixos ortogonais OXY, uma

isometria qualquer do plano transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $T(P) = P_1 = (x_1, y_1)$ cujas coordenadas, neste mesmo sistema OXY, são dadas pelas equações (1) ou (2) acima, onde (a, b) são as coordenadas de $T(O)$ e α é o ângulo entre OX e $O'X' = T(OX)$.

Em particular, vê-se mais uma vez que toda isometria é sobrejetiva pois, como vimos na seção 23, as equações (1) e (2) acima podem ser invertidas: para todo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ existe um único $P = (x, y)$ tal que $T(P) = P_1$, as coordenadas de P sendo obtidas das de P_1 por meio das equações (1) ou (2) daquela seção.

Observamos que as equações de uma isometria T têm uma das formas.

$$\begin{cases} x_1 = cx - dy + a \\ y_1 = dx + cy + b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = cx + dy + a \\ y_1 = dx - cy + b \end{cases}$$

No primeiro caso, a matriz da "parte linear" de T é

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

e, no segundo caso, é

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, T preserva orientação e o determinante

$$\Delta = c^2 + d^2 = 1 > 0$$

enquanto que, no segundo caso,

$$\Delta = -c^2 - d^2 = -1 < 0.$$

Portanto, o sinal do determinante Δ permite distinguir as isometrias que preservam das que invertem a orientação do plano.

26. Rotações

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano.

A rotação de centro O e ângulo α transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com

$$x_1 = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha, \quad y_1 = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha.$$

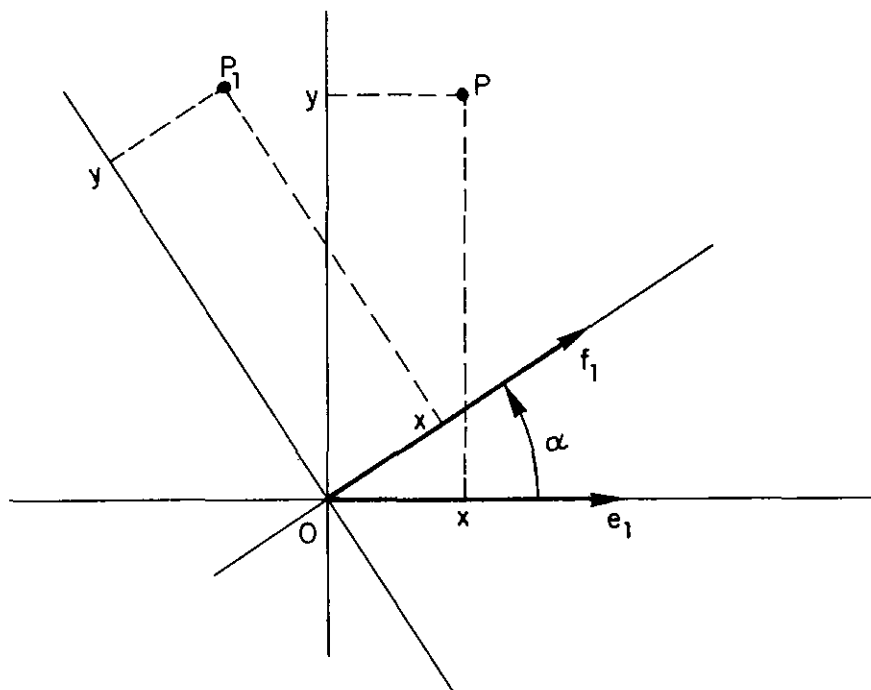



Fig. 26.1 - A rotação de centro O e ângulo α leva P em P_1.

Com efeito, essa rotação leva o vetor unitário e_1 do eixo OX no vetor $f_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot e_2$ e leva o vetor unitário e_2 do eixo OY no vetor f_2, que se obtém de f_1 por uma rotação positiva de 90°, logo $f_2 = -\operatorname{sen}\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2$. Temos

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

e

$$\overrightarrow{OP_1} = x_1 \cdot e_1 + y_1 \cdot e_2 = x \cdot f_1 + y \cdot f_2$$

pois, no sistema de eixos ortogonais OX_1Y_1, cujos vetores unitários são f_1 e f_2, o ponto P_1 tem as mesmas coordenadas (x, y) que P tem no sistema OXY. Então

$$x_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_1 \rangle = \\ = x\langle f_1, e_1 \rangle + y\langle f_2, e_1 \rangle = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha,$$

$$y_1 = \langle \overrightarrow{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_2 \rangle = \\ = x\langle f_1, e_2 \rangle + y\langle f_2, e_2 \rangle = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha.$$

Em particular, uma rotação de 180° em torno do ponto O leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (-x, -y)$. Neste caso, seja qual for o ponto P do plano, a origem O é o ponto médio do segmento PP_1. Às vezes se diz que $P_1 = (-x, -y)$ é o *simétrico* do ponto $P = (x, y)$ em relação ao ponto O. A rotação de 180° em torno de O coincide portanto com a simetria central de centro O.

As equações (1) da seção anterior mostram que toda isometria T do plano, que preserva orientação, é uma rotação de centro O e ângulo α seguida da translação pelo vetor $v = \overrightarrow{OO_1}$, onde $O_1 = (a, b) = T(O)$.

Mostraremos agora que, na realidade, efetuar uma rotação de centro O e ângulo $\alpha \neq 0$ e, em seguida, uma translação no plano é o mesmo que efetuar uma única rotação, de mesmo ângulo α, com centro noutro ponto do plano.

Conseqüentemente, *as únicas isometrias do plano que preservam orientação são as rotações (com centros em pontos arbitrários do plano) e as translações (que correspondem a uma rotação de ângulo $\alpha = 0$, seguida de uma translação).*

Demonstraremos agora a afirmação acima feita. Todas as coordenadas a seguir serão tomadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY pré-fixado. Temos uma isometria T que consiste na rotação de centro de O e ângulo α, seguida de uma translação pelo vetor $v = (a, b)$. Queremos determinar um ponto $O' = (c, d)$ tal que T seja a rotação de centro O' e ângulo α.

Ora, a rotação de centro $O' = (c, d)$ e ângulo α transforma o ponto

$P = (x, y)$ no ponto $P' = (x', y')$ tal que

$$x' = (x - c)\cos\alpha - (y - d)\operatorname{sen}\alpha + c$$
$$y' = (x - c)\operatorname{sen}\alpha + (y - d)\cos\alpha + d.$$

A explicação para as equações acima é simples: o ponto P' se obtém girando o vetor $\overrightarrow{O'P} = (x - c, y - d)$ do ângulo α, obtendo-se o vetor $\overrightarrow{O'P'} = (\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\bar{x} = (x - c)\cos\alpha - (y - d)\operatorname{sen}\alpha$$
$$\bar{y} = (x - c)\operatorname{sen}\alpha + (y - d)\cos\alpha$$

e depois tomando sua extremidade

$$P' = O' + \overrightarrow{O'P'} = (\bar{x} + c, \bar{y} + d).$$

Queremos determinar as coordenadas (c, d) do ponto O' de tal maneira que o ponto P' coincida com $T(P)$. Levando em conta as equações (1) da seção 25, devemos ter

$$\begin{cases} (x - c)\cdot\cos\alpha - (y - d)\cdot\operatorname{sen}\alpha + c = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\operatorname{sen}\alpha + a \\ (x - c)\cdot\operatorname{sen}\alpha + (y - d)\cdot\cos\alpha + d = x\cdot\operatorname{sen}\alpha + y\cdot\cos\alpha + b \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} (1 - \cos\alpha)\cdot c + \operatorname{sen}\alpha\cdot d = a \\ -\operatorname{sen}\alpha\cdot c + (1 - \cos\alpha)d = b \end{cases}$$

O determinante deste sistema (cujas incógnitas são c e d) é igual a $(1 - \cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha$, portanto é diferente de zero, salvo quando $\alpha = 0$, em cujo caso T é a translação pelo vetor $v = (a, b)$. Nos demais casos $(\alpha \neq 0)$, o sistema possui uma única solução (c, d), formada pelas coordenadas do ponto O' que procuramos. Não há dificuldade em obter explicitamente os valores de c e d em função de α, a e b, caso haja necessidade.

Exemplo 1. Dados os vértices $A = (m, n)$ e $B = (p, q)$ de um triângulo equilátero, obter o terceiro vértice C.

O problema admite duas soluções C' e C'' conforme indica a figura 26.2.

O ponto C' é obtido aplicando a B uma rotação de $60°$ em torno do ponto A, enquanto C'' é obtido através de uma rotação de $-60°$, também em torno de A.

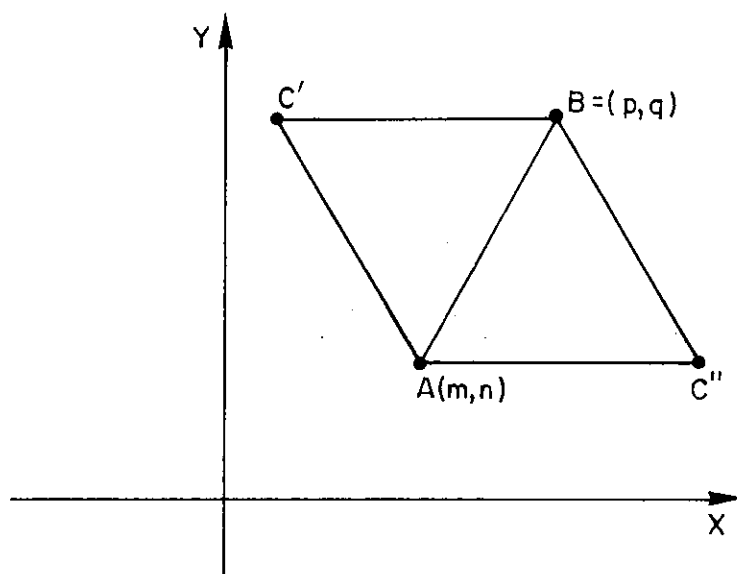



Fig. 26.2

De acordo com as equações introduzidas nesta seção, as coordenadas x' e y' de C' são dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= (p-m)\cos 60° - (q-n)\operatorname{sen} 60° + m \\ &= (p-m)\cdot\frac{1}{2} - (q-n)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y' &= (p-m)\operatorname{sen} 60° + (q-n)\cos 60° + n \\ &= (p-m)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (q-n)\cdot\frac{1}{2} + n \end{aligned}$$

Analogamente obtemos as coordenadas x'' e y'' de C''.

Exemplo 2. Tomemos a circunferência unitária C, de equação $x^2+y^2=1$ e examinemos o efeito de uma rotação R de ângulo α e de centro na origem aplicada a C.

Para obter a equação de $R(C)$, como vimos na seção 24, é preciso obter as expressões das coordenadas x e y de um ponto P em função das coordenadas x_1 e y_1 de seu transformado $R(P)$.

Como vimos acima, x_1 e y_1 são dados, em termos de x e y, por

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ y_1 = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

É possível inverter estas equações (como fizemos na seção 23), de modo a obter

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha + y_1\operatorname{sen}\alpha \\ y = -x_1\operatorname{sen}\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

Substituindo na equação do círculo obtemos

$$(x_1\cos\alpha + y_1\operatorname{sen}\alpha)^2 + (-x_1\operatorname{sen}\alpha + y_1\cos\alpha)^2 = 1,$$

do que resulta

$$\begin{aligned} &x_1^2\cos^2\alpha + 2x_1y_1\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + y_1^2\operatorname{sen}^2\alpha + \\ &+ x_1^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2x_1y_1\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + y_1\cos^2\alpha = 1, \end{aligned}$$

ou seja

$$x_1^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + y_1^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1.$$

Utilizando a identidade $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos finalmente

$$x_1^2 + y_1^2 = 1.$$

Isto significa que a equação obtida para a figura transformada é a mesma da figura original. Isto não é de modo nenhum surpreendente, já que a circunferência é invariante sob rotações em torno de seu centro.

27. Reflexões

O ponto P_1 chama-se o *simétrico* do ponto P em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento PP_1. Se P pertencer a r, diremos que seu simétrico em relação a r é ele próprio. Evidentemente, se P_1 é o simétrico de P relativamente a r então, reciprocamente, P é o simétrico de P_1 relativamente à mesma reta r.

Na prática, obtém-se o simétrico de um ponto em relação a uma reta dobrando ao longo dessa reta a folha de papel onde está gravado o ponto.

A *reflexão* em torno da reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P_1 = T(P)$, simétrico de P em relação a r.

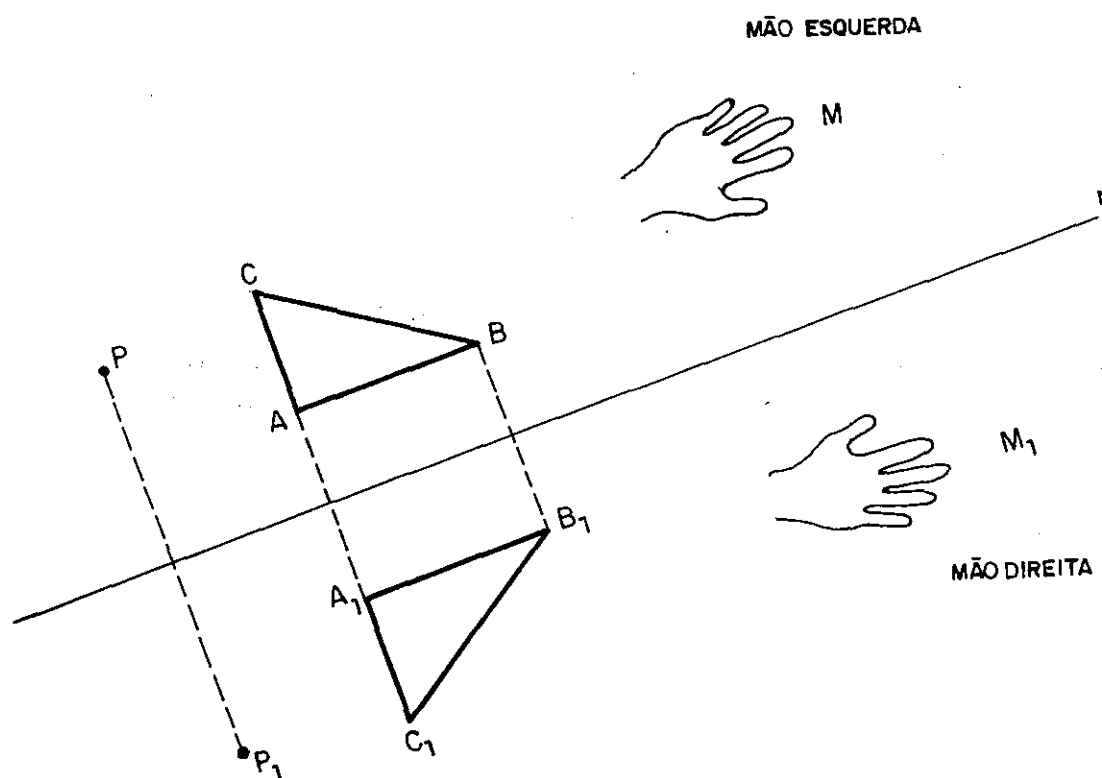



Fig. 27.1 - O ponto P_1, o triângulo $A_1B_1C_1$ e a mão direita M_1 são, respectivamente, as imagens do ponto P, do triângulo ABC e da mão esquerda M pela reflexão em torno da reta r. Note que o sentido de percurso $A_1B_1C_1$ é oposto do sentido ABC.

Tomando um sistema de eixos ortogonais OXY no qual o eixo OX coincida com a reta r em torno da qual se dá a reflexão T, para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T(P) = P_1 = (x, -y)$.

Daí resulta que toda reflexão é uma isometria pois se $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$, pondo $P_1 = (x, -y)$ e $Q_1 = (x', -y')$, é óbvio que

$$\mathrm{d}(T(P), T(Q)) = \mathrm{d}(P_1, Q_1) = \mathrm{d}(P, Q).$$

A expressão $T(P) = (x, -y)$ quando $P = (x, y)$ mostra também que a reflexão T inverte a orientação do plano, pois deixa o eixo OX fixo e inverte a orientação de OY. Em termos dos vetores unitários dos eixos, T transforma e_1 em si mesmo e e_2 em $-e_2$. Evidentemente, o sentido de rotação de e_1 para $-e_2$ é oposto ao sentido de e_1 para e_2.

Se ABC é um triângulo escaleno e $A_1B_1C_1$ é sua imagem pela reflexão em torno de alguma reta, não é possível passar de ABC para $A_1B_1C_1$ mediante um movimento que tenha lugar no plano. A fim de superpor um desses triângulos sobre o outro é necessário sair do plano que os contém e efetuar o movimento no espaço tri-dimensional.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano.

A reflexão T, em torno da reta r, que passa pela origem e faz um ângulo α com o eixo OX, transforma este eixo noutro, OX_1, obtido de OX por rotação de ângulo 2α e transforma OY no eixo OY_1, tal que o ângulo de OY para OY_1 é $180° + \alpha$.

Portanto, se e_1, e_2, f_1 e f_2 são respectivamente os vetores unitários dos eixos OX, OY, OX_1 e OY_1, temos

$$f_1 = \cos 2\alpha \cdot e_1 + \operatorname{sen} 2\alpha \cdot e_2$$

e

$$f_2 = \operatorname{sen} 2\alpha \cdot e_1 - \cos 2\alpha \cdot e_2.$$

A reflexão T, sendo uma isometria, transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $P_1 = xf_1 + yf_2$.

Segue-se imediatamente que

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha, \\ y_1 = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Estas são, portanto, as equações da reflexão em torno de uma reta

que passa pela origem e faz ângulo α com o eixo OX.

Fig. 27.2 - A reflexão em torno de r leva OX em OX_1 e OY em OY_1.

Seja agora r a reta de equação $y = ax + b$, que tem inclinação $a = \operatorname{tg} \alpha$ e corta o eixo OY no ponto de ordenada b.

A reta r', de equação $y = ax$, paralela a r, passa pela origem e faz com o eixo OX o mesmo ângulo α. Para obter a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela reflexão T em torno da reta r, primeiro daremos a P a translação vertical de vetor $-v = (0, -b)$, obtendo $P' = (x, y - b)$. Em seguida, refletimos P' em torno da reta r', obtendo o ponto $P'' = (x'', y'')$ com

$$x'' = x \cdot \cos 2\alpha + (y - b) \cdot \operatorname{sen} 2\alpha,$$
$$y'' = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - (y - b) \cdot \cos 2\alpha.$$

Finalmente, damos a P'' a translação vertical de vetor $v = (0, b)$, che-

gando a $P_1 = T(P) = (x_1, y_1)$, onde

Fig. 27.3 - A reflexão em torno da reta $y = ax + b$ leva P em P_1, com as etapas intermediárias P' e P''.

$$\begin{cases} x_1 = x \cdot \cos 2\alpha + (y - b) \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ y_1 = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - (y - b) \cdot \cos 2\alpha + b \end{cases} \qquad (2)$$

Estas equações fornecem as coordenadas do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, obtido de $P = (x, y)$ pela reflexão em torno da reta r, cuja equação é $y = ax + b$, com $a = \operatorname{tg} \alpha$. Devemos modificá-las de modo a eliminar o ângulo α e exprimir x_1, y_1 em função apenas de x, y, a e b. Para isso, empregaremos as clássicas fórmulas que exprimem o seno e o cosseno de um ângulo como funções racionais da tangente do arco metade. (Veja seção 17.) Segundo elas, de $a = \operatorname{tg} \alpha$ conclui-se que

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2a}{1+a^2}.$$

Portanto

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \cdot x + \dfrac{2a}{1+a^2}(y-b) \\ y_1 = \dfrac{2a}{1+a^2} \cdot x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b \end{cases} \tag{3}$$

são as equações da reflexão em torno da reta $y = ax + b$.

Outro tipo de isometria que inverte a orientação do plano é a *reflexão com deslizamento*. Chama-se assim a transformação do plano que consiste na reflexão em torno de uma reta r seguida de uma translação ao longo de um vetor v, paralelo a r.

Se a equação da reta r é $y = ax + b$ e se as coordenadas do vetor v são (c, ac) então obtêm-se as equações da reflexão em torno de r com vetor de deslizamento v somando-se c à primeira equação do sistema (2) e somando-se ac à segunda.

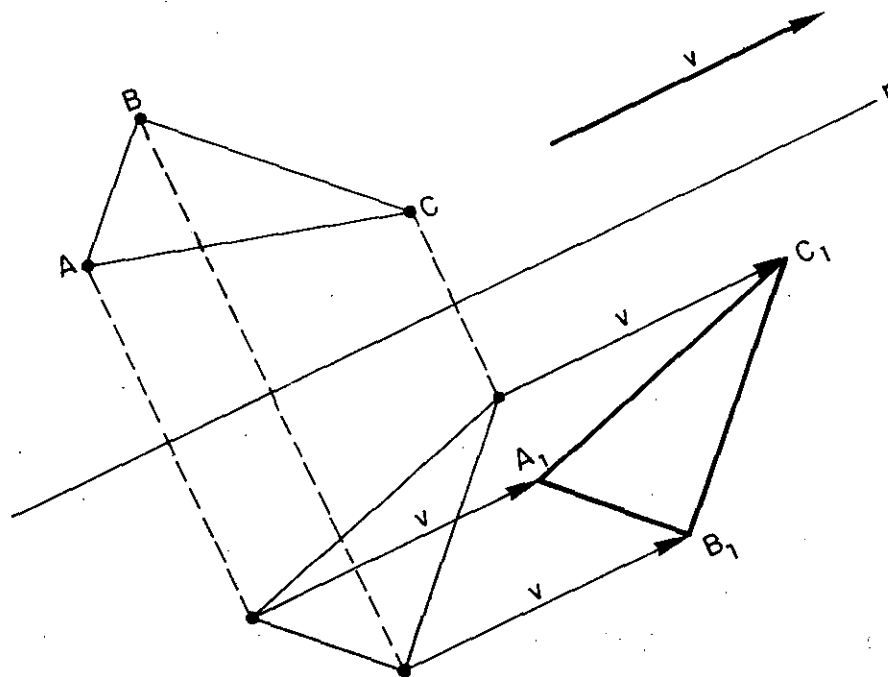



Fig. 27.4 - O triângulo A_1, B_1, C_1, imagem do triângulo ABC pela reflexão em torno de r com vetor de deslizamento v.

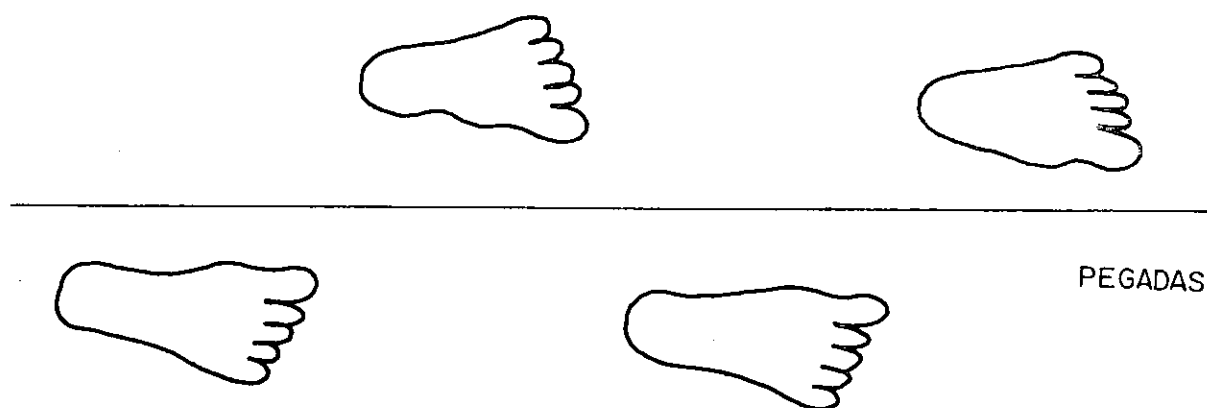



Fig. 27.5 - Pegadas ao longo de um caminho retilíneo ilustram uma reflexão com deslizamento.

As equações (2) da seção 25 dão as coordenadas do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, imagem do ponto $P = (x, y)$ pela isometria mais geral que inverte a orientação do plano. Como se viu alí, essa isometria T consiste na rotação de ângulo α e centro O, seguida da reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz o mesmo ângulo α com o eixo OX e, finalmente, a translação ao longo do vetor $v = \overrightarrow{OO_1}$, onde $O_1 = T(O)$.

Este resultado pode ser simplificado. Mostraremos agora que *qualquer isometria que inverta a orientação do plano é uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento.*

Em primeiro lugar, comparando as equações (2) da seção 25 com as equações (1) desta seção, vemos que uma rotação de ângulo α em torno da origem seguida da reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz ângulo α com o eixo OX é o mesmo que uma simples reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz ângulo $\alpha/2$ com o eixo OX.

Em seguida mostraremos que, se T é a isometria que consiste na reflexão em torno da reta r seguida da translação ao longo do vetor v (não necessariamente paralelo a r), podemos obter outra reta s e outro vetor w, este agora paralelo a s, de tal modo que T é a reflexão com deslizamento determinada pela reta s e pelo vetor w.

Para isto, tomemos um sistema de eixos ortogonais OXY onde OX coincide com r. Se $v = (a, b)$ então T transforma o ponto arbitrário $P = (x, y)$ em $T(P) = (x + a, -y + b)$. Sejam s a reta horizontal da equação $y = b/2$ e $w = (a, 0)$. A reflexão com deslizamento em torno

da reta s com vetor w transforma o ponto arbitrário $P = (x, y)$ em

$$(x, b - y) + (a, 0) = (x + a, -y + b),$$

logo coincide com T.

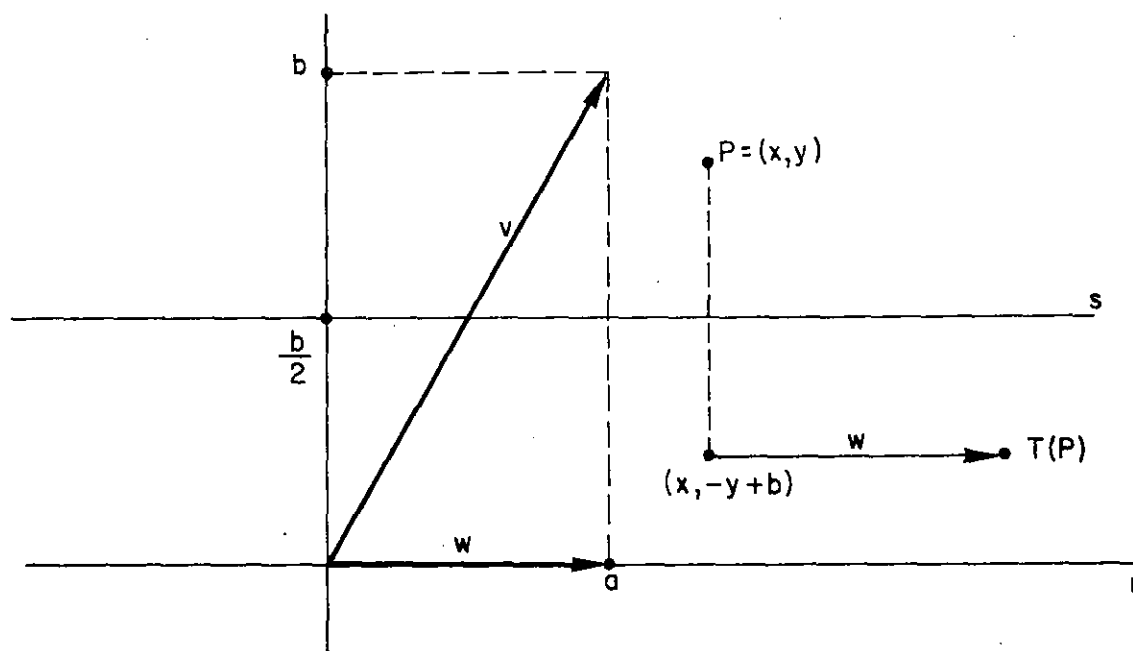



Fig. 27.6 - A reflexão em torno de r seguida da translação ao longo de v é o mesmo que reflexão em torno de s com deslizamento ao longo de w.

Podemos então resumir nossa discussão sobre isometrias do plano, levada a efeito nas seções 25, 26 e 27, do seguinte modo:

Uma isometria que preserva a orientação do plano é, seja uma rotação de ângulo determinado, em torno de um ponto dado, seja uma translação ao longo de um certo vetor. As rotações (de ângulo diferente de 0° e de 360°) têm um único ponto fixo e as translações (ao longo de vetor não-nulo) não têm ponto fixo.

Uma isometria que inverte a orientação do plano é, seja uma reflexão em torno de uma reta dada, seja uma reflexão com deslizamento. No primeiro caso, todos os pontos daquela reta são fixos; no segundo caso, não há pontos fixos.

28. Semelhanças

Seja r um número real positivo. Uma *semelhança* de razão r no plano Π é uma transformação $\sigma: \Pi \to \Pi$ que multiplica por r a distância entre dois pontos P, Q quaisquer em Π, isto é

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = r \cdot d(P, Q).$$

Se σ e σ' são semelhanças, de razões r e r' respectivamente, a composta $\sigma \circ \sigma': \Pi \to \Pi$, definida por $(\sigma \circ \sigma')(P) = \sigma(\sigma'(P))$, é uma semelhança, de razão $r \cdot r'$. Uma isometria é uma semelhança de razão $r = 1$.

Dada a semelhança σ, se $P \neq Q$ então $d(P, Q) \neq 0$ logo

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = r \cdot d(P, Q) \neq 0$$

e daí $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$. Portanto toda semelhança é uma transformação injetiva. Veremos em seguida que toda semelhança σ é também sobrejetiva, logo possui uma inversa σ^{-1}, a qual é ainda uma semelhança, de razão $1/r$, se r for a razão de σ.

Uma semelhança σ transforma toda reta r numa reta $r_1 = \sigma(r)$. Além disso, se as retas r, s são paralelas então suas imagens $r_1 = \sigma(r)$ e $s_1 = \sigma(s)$ são ainda retas paralelas. As demonstrações seguem exatamente os mesmos raciocínios já vistos no caso das isometrias (seção 25) por isso serão omitidas.

Dado o triângulo ABC, retângulo em A, uma semelhança σ o transforma no triângulo $A_1B_1C_1$, onde $A_1 = \sigma(A)$, $B_1 = \sigma(B)$ e $C_1 = \sigma(C)$. Afirmamos que o triângulo $A_1B_1C_1$ é retângulo em A_1.

Com efeito, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

Seja r a razão da semelhança σ. Então

$$d(B_1, C_1)^2 = r^2 \cdot d(B, C)^2 = r^2 \cdot d(A, B)^2 + r^2 \cdot d(A, C)^2 =$$
$$= d(A_1, B_1)^2 + d(A_1, C_1)^2.$$

Pela recíproca do Teorema de Pitágoras, $A_1B_1C_1$ é retângulo em A_1.

Isto significa que toda semelhança transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares. Um retângulo de lados medindo x e y é transformado pela semelhança σ num retângulo cujos lados medem $r \cdot x$ e $r \cdot y$, se r é a razão de σ. Um sistema de eixos ortogonais OXY é levado por σ noutro sistema $O_1X_1Y_1$ de eixos ortogonais. Se as coordenadas do ponto P no sistema OXY são (x, y) então as coordenadas do ponto $P_1 = \sigma(P)$ no sistema $O_1X_1Y_1$ são $(r \cdot x, r \cdot y)$.

Daí resulta, em particular, que toda semelhança $\sigma \colon \Pi \to \Pi$ é uma transformação sobrejetiva.

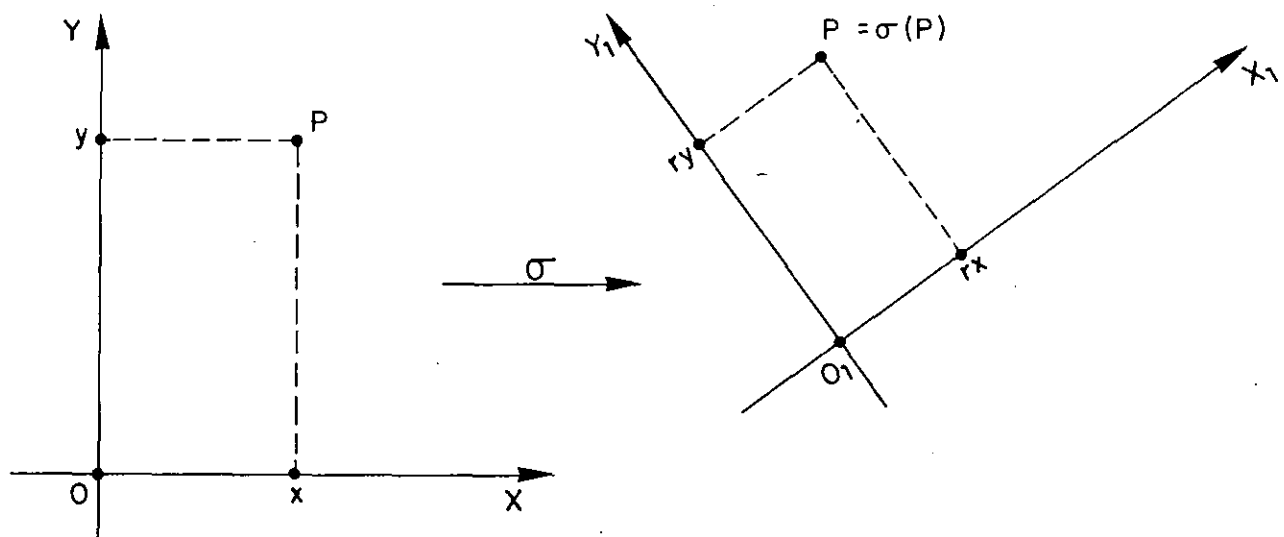



Fig. 28.1 - Se as coordenadas de P no sistema OXY são (x, y) seu transformado $P_1 = \sigma(P)$ tem coordenadas $(r \cdot x, r \cdot y)$ no sistema $O_1X_1Y_1$.

Com efeito, dado um ponto arbitrário P_1, cujas coordenadas no sistema $O_1X_1Y_1$ são (x_1, y_1), temos $P_1 = \sigma(P)$, onde P é o ponto do plano cujas coordenadas no sistema original OXY são $(x_1/r, y_1/r)$.

Mostraremos agora que uma semelhança σ preserva qualquer ângulo, reto ou não. Mais precisamente, se $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$ e $\sigma(C) = C_1$, provaremos que $B\widehat{A}C = B_1\widehat{A}_1C_1$.

Para isto, tomaremos no plano um sistema de eixos ortogonais cuja origem seja o ponto A e cujo eixo horizontal seja a reta AB.

A semelhança σ, de razão r, transforma este sistema noutro, de origem A_1, cujo eixo horizontal é a reta A_1B_1. Seja $y = ax$ a equação da reta AC no sistema inicial. Isto quer dizer que os pontos desta reta têm

coordenadas (x, ax) no primeiro sistema. A semelhança σ os transforma em pontos cujas coordenadas são $(rx, rax) = (rx, a \cdot rx)$ no segundo sistema. Estes pontos transformados constituem a reta A_1C_1, cuja equação, neste outro sistema é, portanto, $y_1 = a \cdot x_1$. Logo o ângulo do eixo A_1B_1, com a reta A_1C_1 (cuja tangente é a) é igual ao ângulo de AB com AC, como queríamos demonstrar.

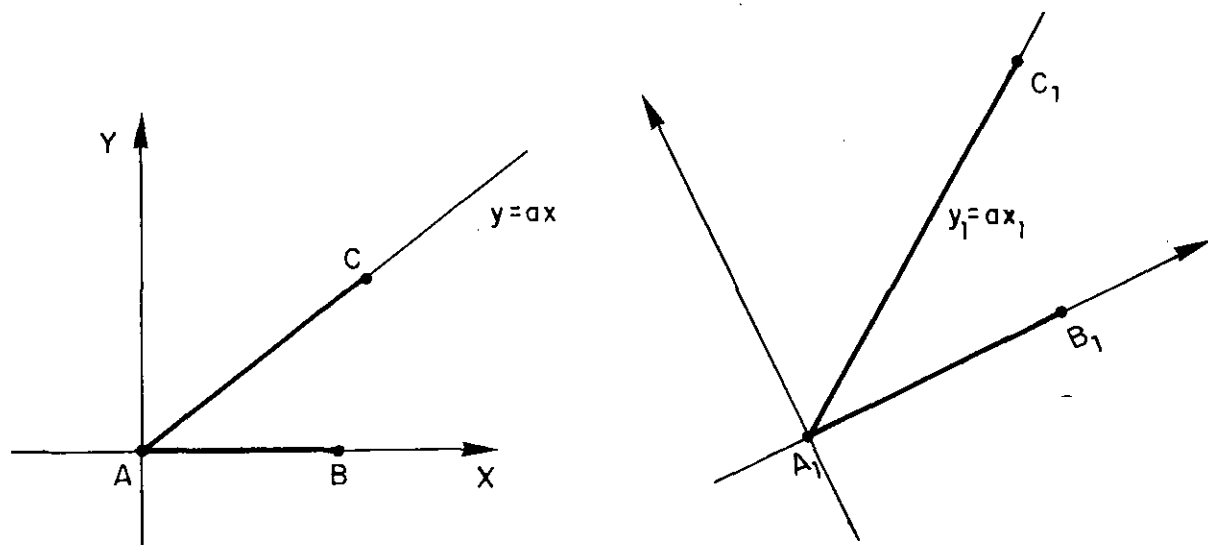



Fig. 28.2 - A semelhança σ transforma o ângulo $B\widehat{A}C$ no ângulo $B_1\widehat{A}_1C_1$, congruente a ele.

Diz-se que duas figuras F e F_1, contidas no plano Π, são *semelhantes* quando existe uma semelhança $\sigma\colon \Pi \to \Pi$ tal que $\sigma(F) = F_1$. Segue-se do que vimos acima que dois triângulos semelhantes têm seus ângulos respectivamente iguais.

Reciprocamente, se os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, no plano Π, são tais que $\widehat{A} = \widehat{A}_1$, $\widehat{B} = \widehat{B}_1$ e $\widehat{C} = \widehat{C}_1$, provaremos agora que eles são semelhantes. Para isto, obteremos uma semelhança $\sigma\colon \Pi \to \Pi$ tal que $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$ e $\sigma(C) = C_1$.

Começamos introduzindo no plano dois sistemas de eixos ortogonais ABY e $A_1B_1Y_1$. O primeiro com origem A, eixo horizontal AB e o eixo vertical orientado de modo que C tenha ordenada positiva. O segundo com origem A_1, eixo horizontal A_1B_1 e o eixo vertical orientado de modo que a ordenada de C_1 seja positiva.

Seja $r = d(A_1, B_1)/\,d(A, B)$. Se as coordenadas de B no sistema ABY são $(b, 0)$ então as coordenadas de B_1 no sistema $A_1B_1Y_1$ são $(r \cdot b, 0)$. Definamos uma transformação $\sigma\colon \Pi \to \Pi$, associando a cada

ponto P, de coordenadas (x, y) no primeiro sistema, o ponto P_1, de coordenadas $(r \cdot x, r \cdot y)$ no segundo sistema. Evidentemente, σ é uma semelhança, com $\sigma(A) = A_1$ e $\sigma(B) = B_1$. Levando em conta que σ preserva ângulos, que $\widehat{A} = \widehat{A}_1$ e $\widehat{B} = \widehat{B}_1$, vemos que o ponto $C' = \sigma(C)$ é tal que a reta A_1C' faz com A_1B_1 um ângulo igual a $\widehat{A}$ e a reta B_1C' faz com A_1B_1 um ângulo igual a $\widehat{B}$. Portanto C' coincide com C_1 ou com o seu simétrico em relação ao eixo A_1B_1. Como as ordenadas de C' e C_1 são positivas, concluímos que $C' = C_1$ e isto termina nossa prova.

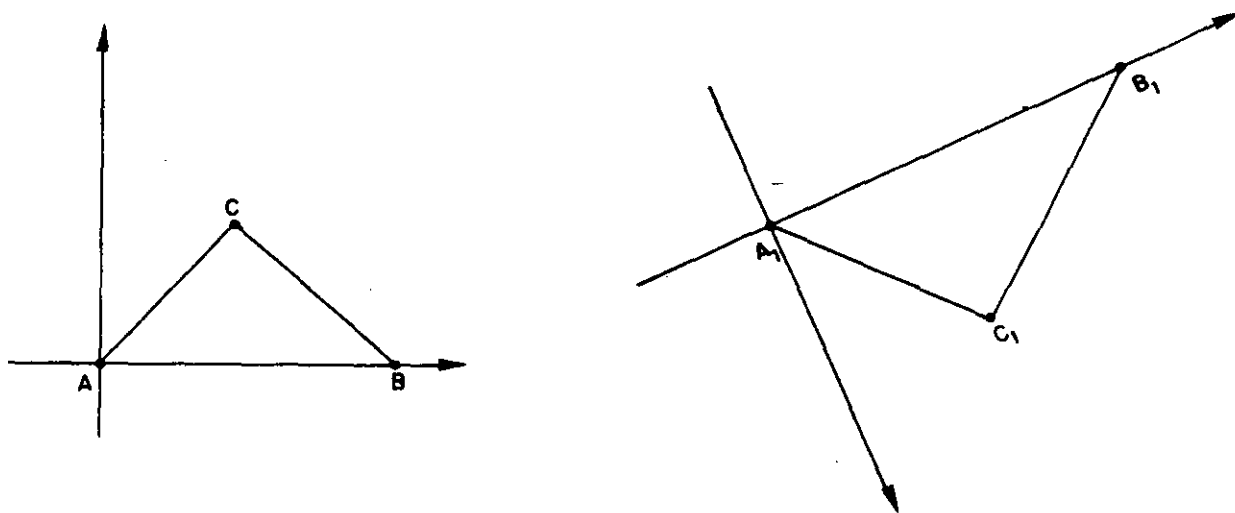



Fig. 28.3 - Eixos ortogonais adaptados aos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$.

29. Homotetias

Exemplos particularmente simples de semelhanças são as homotetias. A *homotetia* de centro O e razão r no plano Π é a transformação $H: \Pi \to \Pi$ que associa a cada ponto P em Π o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$. Se $r = 1$, a homotetia H reduz-se à transformação identidade: $H(P) = P$ para todo P.

Dados os pontos P, Q no plano, com $H(P) = P_1$ e $H(Q) = Q_1$, temos

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OQ} - r \cdot \overrightarrow{OP} =$$
$$= r \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = r \cdot \overrightarrow{PQ}$$

logo

$$\mathrm{d}(H(P), H(Q)) = |\overrightarrow{P_1Q_1}| = r \cdot |\overrightarrow{PQ}| = r \cdot \mathrm{d}(P, Q).$$

Assim toda homotetia é, de fato, uma semelhança. Se H tem centro O e razão r, sua inversa H^{-1} é a homotetia de centro O e razão $1/r$.

Com efeito, se chamarmos de K a homotetia de centro O e razão $1/r$, temos $K(H(P)) = P = H(K(P))$ para todo ponto P do plano, logo $K = H^{-1}$ é a transformação inversa de H.

A homotetia H de centro O e razão r deixa fixo o ponto O, isto é, $H(O) = O$. Além disso, H transforma toda semi-reta de origem O, e toda reta passando por O, em si mesma.

Se $r \neq 1$, a homotetia H de razão r e centro O transforma toda reta ρ que não contém O numa reta paralela.

Com efeito, sendo $r \neq 1$, para todo $P \neq O$ os pontos O, P e $P_1 = H(P)$ são distintos e colineares. Se P pertencer à reta ρ e P_1 também então ρ contém O. Assim, quando ρ não contém o centro O da homotetia, para todo ponto P em ρ tem-se $P_1 = H(P) \notin \rho$, isto é, a reta ρ não tem pontos em comum com sua imagem $\rho_1 = H(\rho)$. Noutras

palavras, ρ e $H(\rho)$ são paralelas.

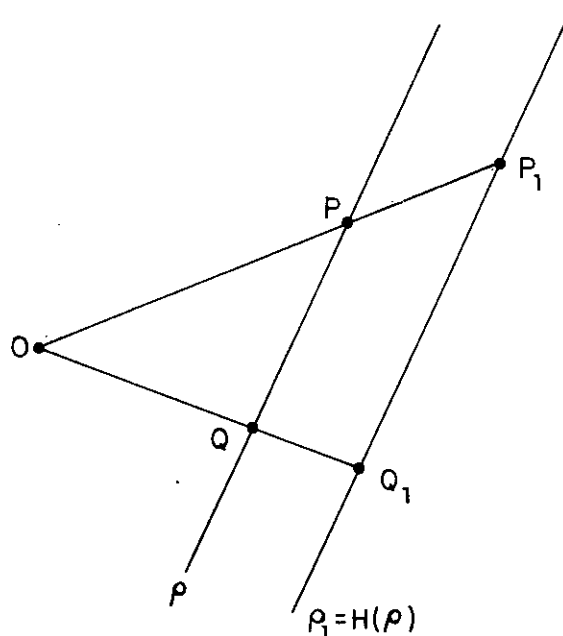



Fig. 29.1 - Uma homotetia de razão $r \neq 1$ transforma toda reta ρ que não passa por O numa reta paralela.

Seja H uma homotetia de centro O e razão r. Em qualquer sistema OXY de eixos ortogonais, com origem no centro O da homotetia H, as coordenadas do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, imagem do ponto $P = (x, y)$ pela homotetia H, são $x_1 = r \cdot x$, $y_1 = r \cdot y$. Escrevendo

$$x_1 = r \cdot x + 0 \cdot y \quad \text{e} \quad y_1 = 0 \cdot x + r \cdot y,$$

vemos que a matriz da homotetia H em relação a qualquer sistema de eixos ortogonais com origem em seu centro O tem a forma

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

30. Homotetias de razão negativa

Às vezes é conveniente considerar transformações $K: \Pi \to \Pi$, que consistem numa homotetia H de centro O e razão $r > 0$, seguida da rotação de $180°$ em torno de O, ou seja, da simetria de centro O.

Neste caso, para todo ponto P do plano Π, temos $K(P) = P_1$, onde $\overrightarrow{OP_1} = -r \cdot \overrightarrow{OP}$. Por isso a transformação K é chamada a *homotetia de razão (negativa)* $-r$.

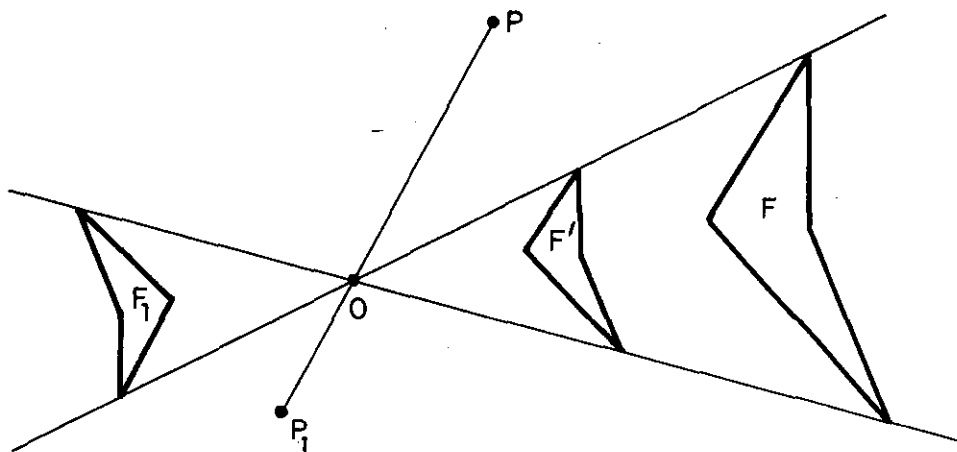



Fig. 30.1 - Homotetia de razão negativa, levando P em P_1 e a figura F em F_1.

Veremos agora um exemplo onde se utiliza uma homotetia de razão negativa. Num triângulo ABC, sejam G o *baricentro* (ponto de interseção das 3 medianas) e Q o *circuncentro* (ponto de interseção das mediatrizes dos três lados). Como sabemos, G é o ponto do triângulo ABC que tem as três coordenadas baricêntricas iguais a $1/3$ e Q é o centro do círculo circunscrito, isto é, do círculo que passa pelos três pontos A, B e C.

A homotetia K de centro G e razão negativa $-1/2$ transforma ABC no triângulo $A_1B_1C_1$, cujos vértices são respectivamente os pontos médios dos lados BC, AC e AB.

Seja h_A a reta perpendicular a BC baixada de A. K transforma h_A na perpendicular a B_1C_1 (portanto a BC) que contém o ponto A_1, ou seja, na mediatriz de BC. O mesmo se dá em relação aos outros dois

vértices B e C. Logo K transforma as 3 alturas do triângulo ABC nas 3 mediatrizes, Como as 3 mediatrizes de ABC se cortam no ponto Q, segue-se que as 3 alturas se cortam também num único ponto H (que se chama o *ortocentro* de ABC), com $K(H) = Q$. Daí resulta que os pontos H, G e Q são colineares, com G entre H e Q e

$$\mathrm{d}(G,Q) = \frac{\mathrm{d}(G,H)}{2}.$$

Resumindo: se H, G e Q são respectivamente o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo ABC então G pertence ao segmento HQ, com $\mathrm{d}(G,Q) = \mathrm{d}(G,H)/2$.

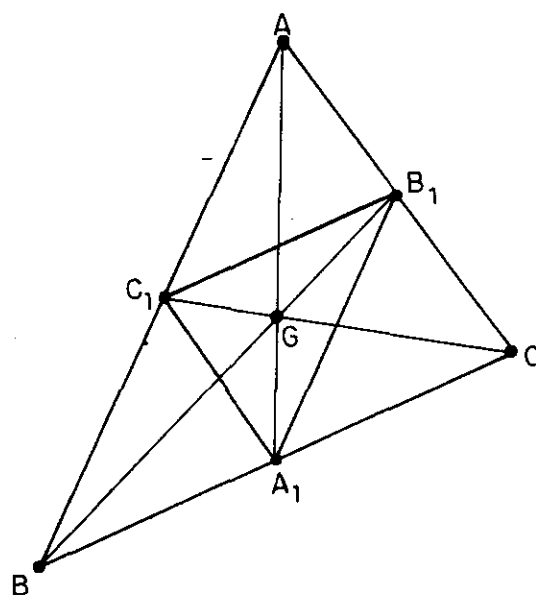



Fig. 30.2 - Homotetia de centro G e razão $-1/2$ leva ABC em $A_1B_1C_1$.

31. As equações de uma semelhança

Seja $\sigma: \Pi \to \Pi$ uma semelhança de razão r. Fixado um ponto arbitrário $O \in \Pi$, consideremos a homotetia $H: \Pi \to \Pi$, de centro O e razão r, cuja inversa, como sabemos, é a homotetia H^{-1}, de mesmo centro O e razão $1/r$. A composta $T = H^{-1} \circ \sigma$ é uma semelhança de razão $(1/r) \cdot r = 1$, ou seja, é uma isometria. A igualdade $T = H^{-1} \circ \sigma$ pode também escrever-se como

$$\sigma = H \circ T.$$

Portanto toda semelhança σ é igual a uma isometria seguida de uma homotetia. Dada σ, o centro da homotetia pode ser escolhido à vontade. Mas é claro que, mudando esse centro não apenas se muda a homotetia H como também a isometria T.

A partir das equações (1) e (2) da seção 23, juntamente com as observações finais da seção anterior, vemos que, fixado um sistema OXY de eixos ortogonais, uma semelhança σ de razão r transforma um ponto qualquer $P = (x, y)$ do plano no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ onde

$$\begin{cases} x_1 = (r \cdot \cos\alpha)x - (r \cdot \operatorname{sen}\alpha)y + ra \\ y_1 = (r \cdot \operatorname{sen}\alpha)x + (r \cdot \cos\alpha)y + rb \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = (r \cdot \cos\alpha)x + (r \cdot \operatorname{sen}\alpha)y + ra \\ y_1 = (r \cdot \operatorname{sen}\alpha)x - (r \cdot \cos\alpha)y + rb, \end{cases}$$

conforme σ preserve ou inverta a orientação do plano.

Nestas equações, (ra, rb) são as coordenadas do ponto $O_1 = \sigma(O)$. Escrevendo $m = r\cos\alpha$, $n = r \operatorname{sen}\alpha$, $p = ra$ e $q = rb$, as equações de uma semelhança σ assumem uma das formas

$$\begin{cases} x_1 = mx - ny + p \\ y_1 = nx + my + q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = mx + ny + p \\ y_1 = nx - my + q, \end{cases}$$

conforme σ preserve ou inverta orientação.

A matriz da "parte linear" de σ é

$$\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, a matriz tem o determinante positivo $m^2 + n^2$ e, no segundo caso, o determinante é igual a $-m^2 - n^2$, logo é negativo. Aqui, $m^2 + n^2 = r^2$, onde r é a razão da semelhança σ.

Usaremos estas equações para provar o seguinte

Teorema *Uma semelhança sem ponto fixo é uma isometria.*

Demonstração: Um ponto P diz-se *fixo* sob σ quando se tem $\sigma(P) = P$. Em termos de um sistema de eixos ortogonais OXY, a igualdade $\sigma(P) = P$, com $P = (x, y)$ significa

$$\begin{cases} x = mx - ny + p \\ y = nx + my + q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = mx + ny + p \\ y = nx - my + q \end{cases}.$$

Estas equações podem ser re-escritas como

$$\begin{cases} (m-1)x - ny = -p \\ nx + (m-1)y = -q \end{cases} \qquad (*)$$

ou

$$\begin{cases} (m-1)x + ny = -p \\ nx - (m+1)y = -q \end{cases}. \qquad (**)$$

Suponhamos que σ preserve orientação, de modo que suas equações são as da esquerda. Dizer que σ não possui ponto fixo significa então afirmar que o sistema $(*)$ é incompatível. Em particular, isto implica que o determinante $(m-1)^2 + n^2$ desse sistema é zero, logo $m = 1$ e $n = 0$. Segue-se que $x_1 = x + p$, $y_1 = y + q$ e σ é uma translação, donde uma isometria.

Em seguida, consideremos o caso em que σ inverte orientação. Suas equações são portanto as da direita. Se σ não admite ponto fixo, o sistema $(**)$ é incompatível, logo o determinante $1 - m^2 - n^2$ é igual a zero, isto é, $m^2 + n^2 = 1$. Então a razão r da semelhança σ é igual a 1 e σ é uma isometria.

32. Transformações afins

Diz-se que $F\colon \Pi \to \Pi$ é uma *transformação afim* do plano Π quando, para quaisquer pontos P, Q em Π e todo número real t, vale:

$$F((1-t)P + tQ) = (1-t)\cdot P_1 + t\cdot Q_1,$$

onde $P_1 = F(P)$, $Q_1 = F(Q)$. A igualdade acima pode também ser escrita sob a forma:

$$F(P + t\cdot \overrightarrow{PQ}) = P_1 + t\cdot \overrightarrow{P_1Q_1}.$$

Se $P_1 \neq Q_1$ esta igualdade significa que F transforma a reta PQ na reta P_1Q_1 de tal modo que, mantendo P e Q fixos e fazendo t variar, quando o ponto $R = P + t\cdot \overrightarrow{PQ}$ percorre a primeira reta com velocidade constante $\overrightarrow{PQ}$, sua imagem

$$R_1 = P_1 + t\cdot \overrightarrow{P_1Q_1}$$

percorre a segunda com velocidade $\overrightarrow{P_1Q_1}$.

Como sabemos, a igualdade $R = (1-t)P + tQ$ é equivalente a $\overrightarrow{PR} = t\cdot \overrightarrow{PQ}$, logo o valor absoluto $|t|$ é igual à razão entre distâncias $\mathrm{d}(P,R)/\,\mathrm{d}(P,Q)$. O número t é negativo quando R está à esquerda do segmento orientado PQ e positivo quando R está à direita do ponto P. Quando $0 \leq t \leq 1$, R pertence ao segmento de reta PQ.

Suponhamos ainda $P_1 \neq Q_1$. A transformação afim F leva os pontos

$$R = (1-t)P + tQ \quad \text{e} \quad S = (1-s)P + sQ$$

nos pontos

$$R_1 = (1-t)P_1 + tQ_1 \quad \text{e} \quad S_1 = (1-s)P_1 + sQ_1$$

da reta P_1Q_1. Temos

$$\overrightarrow{RS} = (s-t)\overrightarrow{PQ} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{R_1S_1} = (s-t)\overrightarrow{P_1Q_1}$$

logo

$$|s-t| = \frac{d(R,S)}{d(P,Q)} = \frac{d(R_1,S_1)}{d(P_1,Q_1)}, \qquad (*)$$

donde

$$\frac{d(R_1,S_1)}{d(R,S)} = \frac{d(P_1,Q_1)}{d(P,Q)} = \text{const.} \qquad (**)$$

As igualdades $(*)$ dizem que, ao longo da reta PQ, a transformação afim F preserva a razão entre distâncias. As igualdades $(**)$ significam que, restrita à reta PQ, a transformação afim F se comporta como se fosse uma semelhança pois multiplica as distâncias por um fator constante c. Mas atenção: esse fator varia de reta para reta! Somente quando F é uma semelhança é que esse fator é o mesmo para todas as retas.

Dada F afim, se $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$ então

$$F(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 \qquad (1)$$

Com efeito, sendo $\alpha + \beta + \gamma = 1$ não se pode ter $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0$ porque, somando, teríamos $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$. Digamos, então, que seja $\alpha + \beta \neq 0$. Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B + \gamma C &= (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot B\right) + \gamma\cdot C = \\ &= (1-\gamma)[(1-t)\cdot A + t\cdot B] + \gamma\cdot C,\end{aligned}$$

onde $t = \beta/(\alpha+\beta)$. A igualdade (1) resulta então da definição de transformação afim, usada duas vezes.

Podemos também escrever (1) sob a forma

$$F(A + \beta\cdot\overrightarrow{AB} + \gamma\cdot\overrightarrow{AC}) = A_1 + \beta\cdot\overrightarrow{A_1B_1} + \gamma\cdot\overrightarrow{A_1C_1},$$

onde β e γ são números reais quaisquer.

Caracterizaremos agora as transformações afins pelas equações que as definem.

Teorema. *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano Π. Uma transformação $F:\Pi \to \Pi$ é afim se, e somente se, existem constantes a, b, c, d, p, q tais que F leva cada ponto $P = (x,y)$ do plano no ponto*

$P_1 = (x_1, y_1)$, *onde*

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + p \\ y_1 = cx + dy + q. \end{cases} \quad (2)$$

Demonstração: Dada a transformação afim $F: \Pi \to \Pi$, ponhamos $U = (1,0)$, $V = (0,1)$, $F(O) = O_1 = (p,q)$, $F(U) = U_1 = (a+p, c+q)$, $F(V) = V_1 = (b+p, d+q)$. Dado $P = (x,y)$, tem-se

$$P = O + x \cdot \overrightarrow{OU} + y \cdot \overrightarrow{OV},$$

logo, pela definição de transformação afim, se $P_1 = F(P)$ então:

$$\begin{aligned} P_1 &= O_1 + x \cdot \overrightarrow{O_1U_1} + y \cdot \overrightarrow{O_1V_1} \\ &= (p,q) + x \cdot (a,c) + y \cdot (b,d) \\ &= (ax + by + p, cx + dy + q). \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas (x_1, y_1) do ponto P_1 são dadas pelas equações (2). Reciprocamente, se $F: \Pi \to \Pi$ é uma transformação que, relativamente ao sistema OXY, leva o ponto $P = (x,y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ cujas coordenadas são expressas pelas equações (2) então F é uma transformação afim pois a relação

$$F((1-t)P + tQ) = (1-t)P_1 + tQ_1$$

decorre imediatamente daquelas equações.

Corolário. *As semelhanças e, em particular, as isometrias são transformações afins.*

Uma transformação afim pode não ser injetiva. Exemplo extremo disso é uma transformação constante (que leva todos os pontos do plano num único ponto).

Outro exemplo de transformação afim não injetiva é a *projeção* $F: \Pi \to \Pi$ sobre a reta r, paralelamente à reta r', onde r e r' são concorrentes. F é definida assim: para todo ponto $P \in \Pi$ pomos $F(P) = P_1 =$

interseção de r com a reta paralela a r' traçada pelo ponto P.

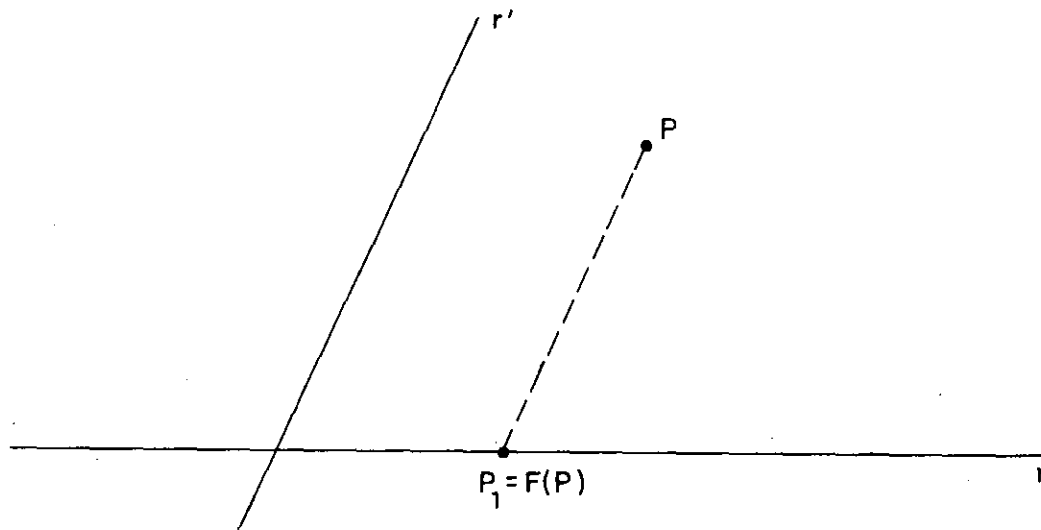



Fig. 32.1 - A projeção F sobre a reta r, paralelamente à reta r'.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY tal que OX coincida com a reta r e O seja o ponto de interseção de r e r'. Seja $v = (\alpha, \beta)$ um vetor não-nulo, paralelo a r', logo $\beta \neq 0$.

Dado o ponto $P = (x, y)$, sua imagem pela projeção F é o ponto

$$P_1 = (x_1, y_1) = P + tv = (x + t\alpha, y + t\beta),$$

onde t é escolhido de modo que a ordenada $y + t\beta$ seja zero, isto é, $t = -y/\beta$. Então $x + t\alpha = x - (\alpha/\beta)y$, logo as coordenadas de P_1 são $x_1 = x - (\alpha/\beta)y$ e $y_1 = 0$.

Resulta, então, do Teorema que a projeção F é uma transformação afim. Evidentemente, F não é injetiva pois qualquer reta paralela a r' é transformada por F num único ponto.

De um modo geral, se uma transformação afim $F : \Pi \to \Pi$ não é injetiva, isto é, se existem dois pontos distintos P e Q cujas imagens $P_1 = F(P)$ e $Q_1 = F(Q)$ coincidem então, para todo número real t, tem-se

$$F((1-t)P + tQ) = (1-t)P_1 + tQ_1 = P_1,$$

logo F transforma todos os pontos $(1-t)P + tQ$ da reta PQ no único ponto P_1, ou seja, F é constante ao longo dessa reta. Neste caso, afirmamos que F é também constante ao longo de qualquer reta $P'Q'$ paralela a PQ.

Com efeito, sendo $P'Q'$ paralela a PQ, existe um número real c tal que $\overrightarrow{P'Q'} = c \cdot \overrightarrow{PQ}$. Para todo ponto R' da reta $P'Q'$ tem-se

$$\overrightarrow{P'R'} = t \cdot \overrightarrow{P'Q'} = ct \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Sendo F afim, segue-se que

$$F(R') = F(P' + \overrightarrow{P'R'}) = F(P' + ct \cdot \overrightarrow{PQ}) =$$
$$= F(P') + ct \cdot \overrightarrow{P_1Q_1} = F(P'),$$

pois $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_1P_1} = 0$.

Assim, quando $P \neq Q$ mas $F(P) = F(Q)$, o plano Π decompõe-se em retas paralelas a PQ, ao longo de cada uma das quais a transformação F é constante.

Se, para algum ponto P' fora da reta PQ, tivermos ainda $F(P') = F(P) = F(Q)$ então F será constante em todo o plano, isto é, transformará todo ponto R do plano no mesmo ponto $P_1 = F(P)$.

Com efeito, os três pontos P', P e Q sendo não-colineares, todo ponto R do plano se escreve como combinação afim de P', P e Q: $R = \alpha \cdot P' + \beta \cdot P + \gamma \cdot Q$, com $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Daí

$$F(R) = \alpha \cdot F(P') + \beta \cdot F(P) + \gamma \cdot F(Q) =$$
$$= \alpha \cdot F(P) + \beta \cdot F(P) + \gamma \cdot F(P) = F(P).$$

Se, entretanto, para algum ponto P' fora da reta PQ tivermos $P_1' = F(P') \neq P_1 = F(P)$, então F não é constante logo (em virtude do que acabamos de ver) tem-se $F(R) \neq F(P)$ para todo ponto R fora da reta PQ. Além disso (supondo ainda $F(P) = F(Q)$), a imagem de F é, neste caso, uma reta, a saber, a reta que passa pelos pontos $P_1 = F(P)$ e $R_1 = F(R)$.

Com efeito, sendo P', P e Q não-colineares, qualquer ponto R do plano é uma combinação afim desses três: $R = \alpha P' + \beta P + \gamma Q$, com $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Segue-se que

$$F(R) = \alpha \cdot F(P') + \beta \cdot F(P) + \gamma \cdot F(Q) =$$
$$= \alpha \cdot P_1' + \beta \cdot P_1 + \gamma \cdot P_1 = \alpha \cdot P_1' + (\beta + \gamma) \cdot P_1 =$$
$$= (1 - t) \cdot P_1' + t \cdot P_1,$$

onde pomos $t = \beta + \gamma$ e, conseqüentemente, $1 - t = \alpha$.

Portanto a imagem $F(R)$ de qualquer ponto R do plano pertence à reta P_1P_1'.

Existe uma situação diante da qual se pode assegurar que uma transformação afim F é não-injetiva. É quando F leva três pontos não-colineares A, B, C em pontos colineares A_1, B_1, C_1. Neste caso tem-se, digamos, $B_1 = (1-t)A_1 + t \cdot C_1$. Pondo $D = (1-t)A + tC$, resulta que $F(D) = B_1 = F(B)$. Portanto, se a transformação afim F leva três pontos não-colineares em pontos colineares, ela é não-injetiva e sua imagem é, conseqüentemente, uma reta ou um único ponto.

Se uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$ é injetiva, em vista do que foi acima exposto, quaisquer três pontos não-colineares A, B, C do plano são levados por F em três pontos não-colineares A_1, B_1, C_1. Assim, qualquer ponto Y do plano escreve-se como combinação linear afim $Y = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1$. Pondo $X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$, temos $F(X) = Y$. Logo F é sobrejetiva. Reciprocamente, se a transformação afim F é sobrejetiva, ela é também injetiva, pois do contrário, como vimos acima, sua imagem seria um ponto ou uma reta.

33. O posto de uma transformação afim

Resulta do que foi dito na seção anterior que há três tipos de transformações afins:

Transformações de posto zero São as transformações afins constantes $F: \Pi \to \Pi$. Para que F seja constante é suficiente que transforme três pontos não-colineares num único ponto.

Transformações de posto um São as transformações afins $F: \Pi \to \Pi$ que transformam todo o plano Π numa reta. Elas não são constantes nem injetivas. Se $P \neq Q$ mas $F(P) = F(Q)$ então F é constante ao longo da reta PQ e de todas as retas paralelas a PQ. F transforma essas retas em pontos os quais, como F não é constante, constituem uma reta, imagem do plano Π pela transformação F. Uma projeção é exemplo de transformação afim de posto um.

Transformações de posto dois São as transformações afins $F: \Pi \to \Pi$ que têm uma das propriedades seguintes, e portanto todas elas: a) F é injetiva; b) F é sobrejetiva; c) F transforma três pontos não-colineares em pontos não-colineares. Portanto, as transformações afins de posto dois são aquelas que possuem uma inversa $F^{-1}: \Pi \to \Pi$. As semelhanças, em particular as isometrias, têm posto dois.

Em termos de um sistema de eixos ortogonais OXY, uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$ leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com

$$x_1 = ax + cy + p$$
$$y_1 = bx + dy + q.$$

O posto de F é zero precisamente quando $a = b = c = d = 0$.

F tem posto um se, e somente se, algum dos coeficientes a, b, c, d é diferente de zero mas o determinante $\Delta = ad - bc$ é igual a zero, isto é, os vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ não são ambos nulos e um deles é múltiplo do outro. Com efeito, esta condição significa que $b = m \cdot a$ e

$d = m \cdot c$, logo as equações acima se escrevem:

$$x_1 = ax + cy + p$$
$$y_1 = max + mcy + q$$

portanto os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ da forma $P_1 = F(P)$ estão todos na reta $y_1 = mx_1 + n$, onde $n = q - mp$.

Finalmente, F tem posto dois se, e somente se, o determinante $\Delta = ad - bc$ é diferente de zero, ou seja, os vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ não são colineares. Com efeito, esta condição significa que, para quaisquer x_1 e y_1 dados, as equações acima têm sempre uma (única) solução (x, y), isto é, para todo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ dado no plano, existe um (único) ponto $P = (x, y)$ tal que $F(P) = P_1$. Assim, F é sobrejetiva e, conseqüentemente, tem posto 2.

Uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$, de posto dois, transforma retas em retas (por ser afim) e leva retas paralelas em retas paralelas (por ser injetiva).

Exemplo. (Reflexões oblíquas): Um tipo de transformação afim de posto dois que não é uma isometria nem uma semelhança é dado pelas *reflexões oblíquas*. Sejam r e r' retas do plano Π que se cortam no ponto O. Suponhamos que r e r' não sejam perpendiculares. A reflexão em torno de r paralelamente a r' é a transformação $F: \Pi \to \Pi$ que associa a cada ponto P o ponto $F(P) = P_1$ tal que PP_1 é paralela a r', e r corta o segmento PP_1 em seu ponto médio M.

Tomando um sistema de eixos ortogonais OXY com origem O e eixo OX coincidindo com r, e um vetor $v = (\alpha, \beta)$ paralelo a r', temos $\beta \neq 0$. Se $P = (x, y)$ então, como já vimos, $M = (x - (\alpha/\beta)y, 0)$. Logo

$$P_1 = 2M - P = \left(x - \frac{2\alpha}{\beta}y, -y\right).$$

Portanto a transformação F leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com $x_1 = x - (2\alpha/\beta)y$ e $y_1 = -y$. Isto mostra que F é uma transformação afim. Como r' não é perpendicular a r, a mediana OM do triângulo OP_1P não é uma altura. Assim, OP_1P não é isósceles, isto é, $d(O, P_1) \neq d(O, P)$. Como $O = F(O)$ e $P_1 = F(P)$, vemos que F não preserva distâncias, isto é, não é uma isometria. Além disso, F leva o segmento OM em si mesmo e leva o segmento OP em OP_1. Como

OP_1P não é isósceles, o ângulo $\widehat{P}$ é diferente do ângulo $\widehat{P_1}$. Logo F não preserva ângulos, portanto não é uma semelhança. Note que F inverte a orientação do plano.

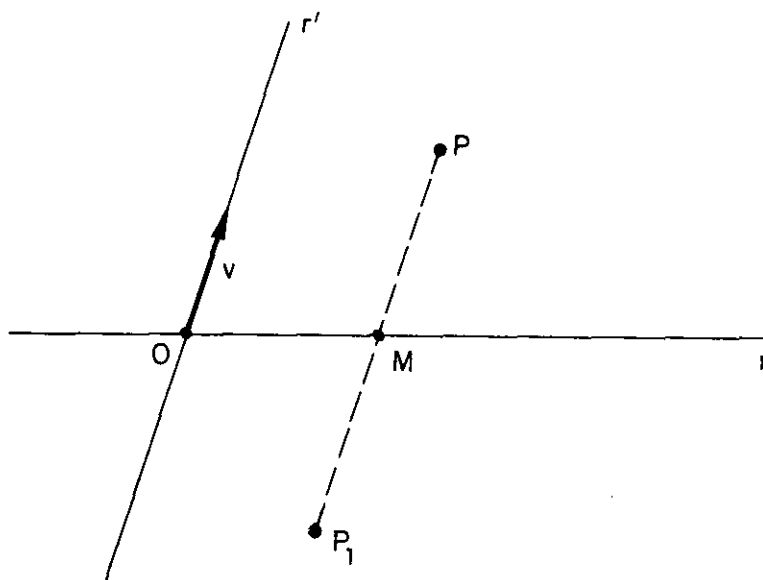



Fig. 33.1 - A reflexão oblíqua F leva P em P_1 e deixa fixos todos os pontos da reta r.

34. As transformações afins e a Geometria

Seja ABC um triângulo no plano Π. Uma isometria $F: \Pi \to \Pi$ transforma ABC num triângulo $A_1B_1C_1$ que tem os lados e os ângulos iguais aos de ABC. Uma semelhança leva ABC num triângulo que tem os ângulos iguais e os lados proporcionais aos de ABC. Por outro lado, como mostraremos agora, uma transformação afim bem escolhida pode transformar o triângulo ABC em *qualquer* outro triângulo dado.

Um conjunto ordenado de três pontos não-colineares A, B, C é o que se chama um *referencial* no plano Π.

Fixado o referencial A, B, C no plano Π, qualquer ponto P desse plano se exprime, de modo único, como combinação afim

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = A + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$$

$(\alpha = 1 - \beta - \gamma)$ dos pontos A, B e C.

Com efeito, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não sendo múltiplos um do outro, existem e são únicos os números reais β, γ tais que

$$\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}.$$

(Cfr. Teorema da seção 18.)

Esta observação é a base do seguinte

Teorema. *Seja A, B, C um referencial no plano Π. Dados arbitrariamente os pontos A_1, B_1 e C_1 em Π, existe uma, e uma só, transformação afim $F: \Pi \to \Pi$ tal que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$.*

Demonstração: Dado qualquer ponto P no plano Π, existem α, β, γ únicos tais que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ e $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$. Definimos a transformação $F: \Pi \to \Pi$ pondo

$$F(P) = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1 + \gamma \cdot C_1.$$

É imediato que se tem $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$. A verificação de que a transformação F, assim definida, é afim fica aos

cuidados do leitor. Finalmente, se $G: \Pi \to \Pi$ é outra transformação afim com $G(A) = A_1$, $G(B) = B_1$ e $G(C) = C_1$ então, para todo ponto P do plano, com $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$, tem-se

$$G(P) = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1 + \gamma \cdot C_1 = F(P),$$

logo $G = F$. Isto conclui a prova do teorema.

Observação: O posto de F é zero, um ou dois, conforme se tenha $A_1 = B_1 = C_1$, A_1, B_1 e C_1 sejam colineares mas não coincidentes, ou A_1, B_1 e C_1 sejam não-colineares, respectivamente.

Vamos agora olhar o teorema acima do ponto de vista computacional. Em termos de um sistema de eixos ortogonais prefixado, a transformação afim F que desejamos encontrar leva o ponto genérico $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = (ax + by + p, cx + dy + q)$. São dados os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $A_1 = (w_1, z_1)$, $B_1 = (w_2, z_2)$, $C_1 = (w_3, z_3)$ e o teorema afirma que é possível determinar, de uma única maneira, os números a, b, c, f, p, q de tal modo que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$. Estas três condições, quando expressas por meio das coordenadas dos pontos dados, equivalem ao seguinte sistema de seis equações lineares nas seis incógnitas a, b, c, d, p, q:

$$\begin{aligned}
ax_1 + by_1 + p &= w_1 \\
cx_1 + dy_1 + q &= z_1 \\
ax_2 + by_2 + p &= w_2 \\
cx_2 + dy_2 + q &= z_2 \\
ax_3 + by_3 + p &= w_3 \\
cx_3 + dy_3 + q &= z_3.
\end{aligned}$$

Como se vê, três das incógnitas aparecem apenas nas três primeiras equações e as outras três apenas nas últimas três equações. Logo temos, na realidade, dois sistemas separados de três equações com três incógnitas cada um, a saber:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + p = w_1 \\ ax_2 + by_2 + p = w_2 \\ ax_3 + by_3 + p = w_3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} cx_1 + dy_1 + q = z_1 \\ cx_2 + dy_2 + q = z_2 \\ cx_3 + dy_3 + q = z_3. \end{cases}$$

Observe-se que, ao contrário do costume consagrado, nessas equações as últimas letras do alfabeto, x, y, w, z, representam as quantidades conhecidas enquanto as primeiras, a, b, c, d, p, q, designam as incógnitas.

Subtraindo a primeira equação das outras duas em cada um destes sistemas, obtemos

$$\begin{cases} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = w_2 - w_1 \\ a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) = w_3 - w_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} c(x_2 - x_1) + \mathrm{d}(y_2 - y_1) = z_2 - z_1 \\ c(x_3 - x_1) + \mathrm{d}(y_3 - y_1) = z_3 - z_1. \end{cases}$$

Como os vetores $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ não são múltiplos um do outro, estes sistemas são determinados. Resolvendo-os, facilmente obtemos os valores de a, b, c, d. Substituindo-os nas equações originais, encontramos p e q.

Como sabemos, uma transformação afim $F\colon \Pi \to \Pi$ de posto 2 transforma retas paralelas em retas paralelas. Em particular, F leva um paralelogramo noutro paralelogramo.

Na realidade, dados dois paralelogramos $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ quaisquer, existe sempre uma (única) transformação afim F tal que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$ e $F(D) = D_1$, ou seja, F transforma o paralelogramo $ABCD$ no paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$.

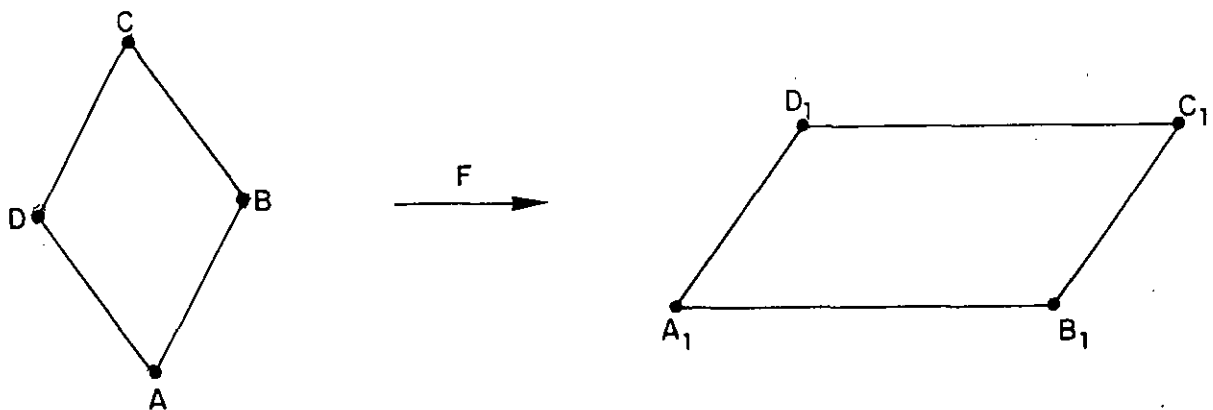



Fig. 34.1 - Todo paralelogramo pode ser levado noutro por uma transformação afim conveniente.

Com efeito, pelo teorema acima, existe uma (única) transformação afim F com $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$. Afirmamos que

se tem necessariamente $F(D) = D_1$. Com efeito, F leva a reta CD numa paralela a A_1B_1 passando por C_1, a qual só pode ser a reta C_1D_1. Analogamente, F leva a reta AD na reta A_1D_1. O ponto P_1, estando nas duas retas CD e AD, é levado por F num ponto que está ao mesmo tempo em C_1D_1 e A_1D_1, portanto $F(D) = D_1$.

Por outro lado, se $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ são quadriláteros arbitrários no plano Π, podemos encontrar uma (única) transformação afim $F\colon \Pi \to \Pi$ tal que $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$ e $F(C) = C_1$. Mas esta transformação F pode não levar D em D_1. Portanto, dados 2 quadriláteros no plano, nem sempre é possível achar os números a,b,c,d,p,q tais que a transformação afim F, dada em coordenadas por $F(x,y) = (ax + by + p, cx + dy + q)$, leve um desses quadriláteros no outro.

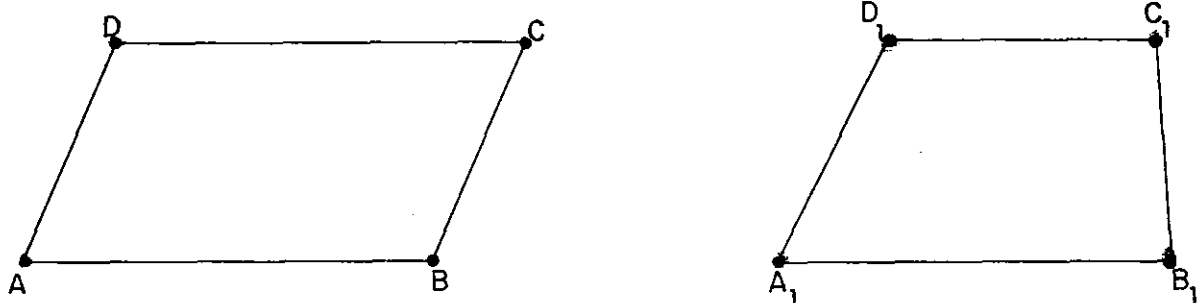



Fig. 34.2 - Não existe uma transformação afim do plano levando o paralelogramo $ABCD$ no trapézio $A_1B_1C_1D_1$.

35. O significado geométrico do determinante

Sabemos que uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$, quando restrita a uma reta arbitrária, multiplica as distâncias entre pontos dessa reta por um fator constante (que varia de reta para reta).

No que se segue, a transformação afim F tem posto 2, isto é, leva três pontos não-colineares quaisquer em pontos não-colineares.

Mostraremos que existe uma constante Δ tal que F transforma um triângulo qualquer ABC do plano num triângulo $A_1B_1C_1$ com

$$\frac{\text{área } (A_1B_1C_1)}{\text{área } (ABC)} = |\Delta|.$$

Essa constante será chamada o *determinante* da transformação F.

Quando se fixa um sistema de eixos ortogonais OXY, a transformação afim F leva o ponto arbitrário $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = (ax + by + p, cx + dy + q)$, onde a, b, c, d, p e q não dependem do ponto P. A constante Δ é o determinante $\Delta = ad - bc$ da matriz cujas colunas são (a, c) e (b, d), nesta ordem.

Evidentemente, quando se tomam outros eixos ortogonais, os números a, b, c, d mudam (bem como p e q) mas, admitindo o resultado que vamos provar, o determinante $\Delta = ad - bc$ permanece inalterado.

Com efeito, o sinal de Δ, como sabemos, indica se o sentido de rotação do vetor (a, c) para o vetor (b, d) coincide ou não com o sentido de rotação de OX para OY. Ele informa se a transformação F preserva ou inverte a orientação do plano. E o valor absoluto $|\Delta|$ é o fator pelo qual F multiplica a área de um triângulo qualquer do plano. Logo Δ não depende do sistema de eixos ortogonais escolhido.

Antes de enunciar o teorema central desta seção, vamos introduzir a multiplicação de matrizes.

O *produto* de duas matrizes 2×2 é a matriz definida pela igualdade abaixo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

O elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna da matriz produto é o produto interno do i-ésimo vetor-linha da primeira matriz pelo j-ésimo vetor-coluna da segunda. (Aqui, i e j podem ser 1 ou 2.)

Se indicarmos com $\mathbf{a}$ a primeira matriz, com $\mathbf{a}'$ a segunda, com $\mathbf{aa}'$ a matriz produto e seus determinantes com $\det \mathbf{a}$, $\det \mathbf{a}'$ e $\det \mathbf{aa}'$, um cálculo direto e elementar mostrará que

$$\det \mathbf{aa}' = \det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{a}'.$$

Esta igualdade é a base em que se sustenta a demonstração do teorema seguinte. Nele se tem uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$. Fixando um sistema de eixos ortogonais no plano Π, F transforma cada ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (ax + by + p, cx + dy + q)$. Dados os pontos $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$, F os transforma em

$$A_1 = (ax_0 + by_0 + p, cx_0 + dy_0 + q),$$
$$B_1 = (ax_1 + by_1 + p, cx_1 + dy_1 + q),$$
$$C_1 = (ax_2 + by_2 + p, cx_2 + dy_2 + q).$$

Teorema. *Tem-se*

$$\frac{\text{área } (A_1B_1C_1)}{\text{área } (ABC)} = |\Delta|,$$

onde $\Delta = ad - bc$.

Demonstração: Como sabemos, as áreas dos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são respectivamente os valores absolutos dos determinantes

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

e

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) & c(x_1 - x_0) + \mathrm{d}(y_1 - y_0) \\ a(x_2 - x_0) + b(y_2 - y_0) & c(x_2 - x_0) + \mathrm{d}(y_2 - y_0) \end{vmatrix}.$$

Pondo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix},$$

temos

$$\text{área }(ABC) = \frac{1}{2}|\det \mathbf{x}|$$

e

$$\text{área }(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}|\det \mathbf{ax}| = \frac{1}{2}|\det \mathbf{a}| \cdot |\det \mathbf{x}|.$$

Segue-se imediatamente que

$$\frac{\text{área }(A_1B_1C_1)}{\text{área }(ABC)} = |\det \mathbf{a}|.$$

36. Três caminhos para o mesmo lugar

Seja $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$ um ponto interior ao triângulo ABC, dado por suas coordenadas baricêntricas α, β e γ. Como se sabe, vale $\alpha + \beta + \gamma = 1$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$.

O ponto P decompõe o triângulo ABC em três triângulos justapostos ABP, BCP e APC, Queremos provar que as coordenadas baricêntricas do ponto P têm a seguinte interpretação geométrica:

$$\alpha = \frac{\text{área }(BCP)}{\text{área }(ABC)}, \quad \beta = \frac{\text{área }(APC)}{\text{área }(ABC)}, \quad \gamma = \frac{\text{área }(ABP)}{\text{área }(ABC)}. \qquad (*)$$

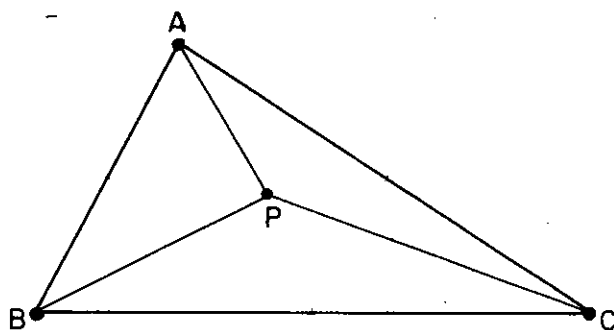



Fig. 36.1 - As coordenadas baricêntricas do ponto P obtêm-se a partir das áreas dos triângulos APC, ABP, BCP e ABC.

Estas relações estendem para duas dimensões algo que já conhecemos em uma dimensão, a saber: se P é um ponto interior ao segmento AB, temos $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ e

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}(P,B)}{\mathrm{d}(A,B)}, \quad \beta = \frac{\mathrm{d}(A,P)}{\mathrm{d}(A,B)}.$$

O objetivo desta seção é demonstrar as relações $(*)$, que caracterizam as coordenadas baricêntricas α, β e γ. Evidentemente, basta provar a primeira delas; as outras são análogas.

Daremos três demonstrações diferentes, que ilustrarão alguns dos diferentes métodos de que dispomos para resolver problemas geométricos.

Começamos observando que

$$P = \alpha \cdot A + (\beta + \gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} \cdot B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \cdot C\right) = \alpha \cdot A + \delta \cdot D$$

onde $\delta = \beta + \gamma$ (de modo que $\alpha + \delta = 1$) e

$$D = [\beta/(\beta+\gamma)] \cdot B + [\gamma/(\beta+\gamma)] \cdot C,$$

logo D pertence ao segmento BC e P ao segmento AD. Portanto,

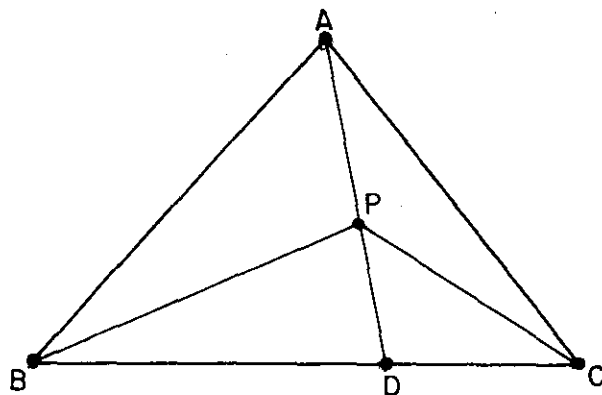



Fig. 36.2 - Se $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot D$ então $\alpha = \mathrm{d}(P, D)/\,\mathrm{d}(A, D)$.

como vimos, de $P = \alpha \cdot A + \delta \cdot D$ resulta que $\alpha = \mathrm{d}(P, D)/\,\mathrm{d}(A, D)$.

Assim, a relação $\alpha =$ área (BCP)/área (ABC) estará demonstrada se provarmos que

$$\frac{\text{área }(BCP)}{\mathrm{d}(P,D)} = \frac{\text{área }(ABC)}{\mathrm{d}(A,D)}.$$

Ou seja, tudo o que temos a fazer é provar que, fixada uma semi-reta de origem D, quando o ponto P se desloca ao longo dessa semi-reta, a área do triângulo BCP é diretamente proporcional ao comprimento do segmento PD.

Primeira demonstração (usando Geometria Euclidiana).

Se tomarmos um ponto P' na semi-reta DP de modo que $\mathrm{d}(P', D) = 2 \times \mathrm{d}(P, D)$, o triângulo BCP' será formado por dois triângulos justapostos BDP' e DCP'. A área de BDP' é o dobro da área de BDP. (Um vértice B comum – logo mesma altura – e base o dobro.) Analogamente a área de DCP' é o dobro da área de DCP. Logo a área de BCP' é o dobro da área de BCP. O mesmo argumento

mostra, mais geralmente, que se $\text{d}(P', D) = n \times \text{d}(P, D)$ então

$$\text{área } (BCP') = n \times \text{área } (BCP),$$

seja qual for o número natural n. Isto nos permite concluir que a área de BCP é diretamente proporcional ao comprimento de PD. (Veja o capítulo "Grandezas Proporcionais", no livro "Meu Professor de Matemática e outras Histórias".)

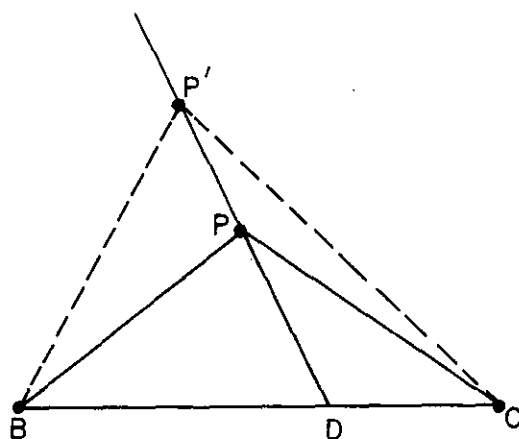



Fig. 36.3 - A área de BCP é proporcional ao comprimento de PD, desde que P se desloque ao longo de uma semi-reta fixa.

Segunda demonstração (usando coordenadas).

Tomamos um sistema de eixos ortogonais no qual a origem seja o ponto B e o eixo OX contenha o segmento BC. Então $A = (a, b)$, $B = (0,0)$, $C = (c,0)$, $D = (d,0)$ e

$$P = \alpha \cdot A + \delta \cdot D = (\alpha a + \delta d, \alpha b)$$

são as coordenadas dos pontos em questão. A fórmula da seção 22 exprime as áreas dos triângulos BCP e ABC respectivamente como

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} c & 0 \\ \alpha a + \delta d & \alpha b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\alpha bc \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & -b \\ c - a & -b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}bc.$$

Portanto,

$$\frac{\text{área } (BCP)}{\text{área } (ABC)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha bc\right)}{\left(\frac{1}{2}bc\right)} = \alpha.$$

Terceira demonstração (usando transformações afins).

A relação

$$\frac{\text{área }(BCP)}{\text{área }(ABC)} = \frac{d(P,D)}{d(A,D)} = \alpha$$

é evidente quando AD é perpendicular a BC pois neste caso PD e AD são as alturas desses triângulos, logo

$$\text{área }(BCP) = \frac{1}{2}\, d(P,D) \cdot d(B,C)$$

e

$$\text{área }(ABC) = \frac{1}{2}\, d(A,D) \cdot d(B,C).$$

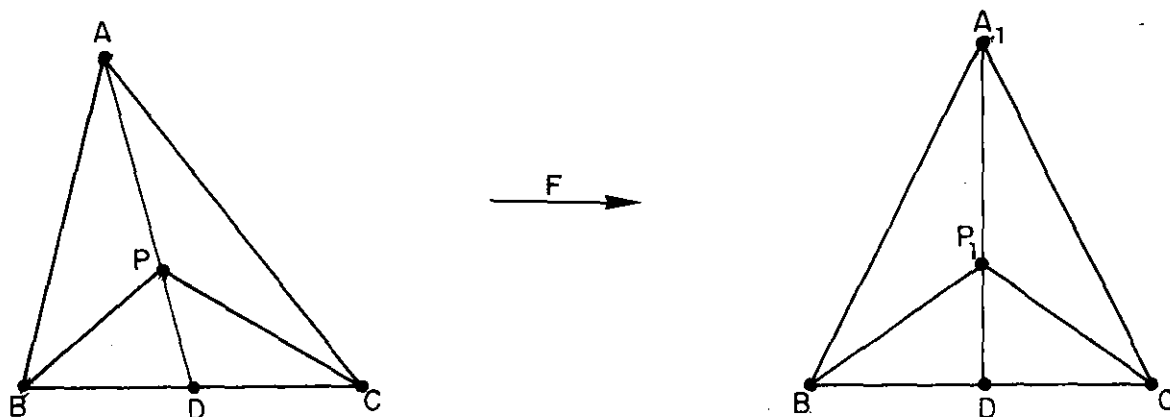



Fig. 36.4 - A transformação afim F deixa fixos B, D e C e leva A em A_1 de modo que A_1D seja a altura de A_1BC.

Para recair nessa situação ideal levantemos, a partir de D, a perpendicular à base BC e sobre ela tomemos o ponto A_1 de modo que $d(A,D) = d(A_1,D)$. Consideremos a (única) transformação afim F que deixa fixos B, C e transforma A em A_1. Como F preserva razão entre distâncias de pontos colineares, temos $F(D) = D$ e, pondo $F(P) = P_1$, temos $d(P_1,D) = d(P,D)$. Seja Δ o determinante da transformação afim F. Então

$$\text{área }(BCP_1) = |\Delta| \cdot \text{área }(BCP)$$

e

$$\text{área }(A_1BC) = |\Delta| \cdot \text{área }(ABC),$$

logo

$$\frac{\text{área }(BCP_1)}{\text{área }(A_1BC)} = \frac{\text{área }(BCP)}{\text{área }(ABC)}.$$

Como A_1D é perpendicular a BC, temos

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}(P_1, D)}{\mathrm{d}(A_1, D)} = \frac{\text{área }(BCP_1)}{\text{área }(A_1BC)} = \frac{\text{área }(BCP)}{\text{área }(ABC)},$$

como queríamos demonstrar.

37. Transformações afins de um plano noutro

A noção de transformação afim pode ser estendida, de modo a abranger transformações $F: \Pi \to \Pi_1$, definidas num plano Π e tomando valores num plano Π_1 que pode ser igual a, ou diferente de, Π.

A definição é literalmente a mesma: $F: \Pi \to \Pi_1$ chama-se uma *transformação afim* quando, para quaisquer pontos P, Q em Π e todo número real t tem-se

$$F((1-t)P + tQ) = (1-t)P_1 + tQ_1,$$

onde $P_1 = F(P)$ e $Q_1 = F(Q)$.

Essencialmente todas as definições, propriedades, teoremas e observações que estabelecemos para transformações afins de um plano em si mesmo valem, com pequenas e óbvias mudanças de linguagem, para o caso mais geral de uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi_1$. A principal mudança a fazer é quando se tomam coordenadas. Se $\Pi \neq \Pi_1$, em vez de um único sistema de eixos ortogonais, devemos considerar um sistema OXY no plano Π e outro sistema $O_1X_1Y_1$ no plano Π_1. As coordenadas de um ponto no plano Π serão tomadas em relação ao sistema OXY. Se o ponto estiver em Π_1, as coordenadas se referirão ao sistema $O_1X_1Y_1$.

O principal exemplo de uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi_1$, definida num plano Π e tomando valores noutro plano Π_1, é a projeção paralela, que definiremos agora.

Dados os planos Π e Π_1, seja r uma reta não paralela a nenhum deles. A projeção $F: \Pi \to \Pi_1$, paralelamente à reta r, associa a cada ponto P do plano Π o ponto $P_1 = F(P)$, obtido como interseção do plano Π_1, com a paralela a r traçada pelo ponto P.

Evidentemente, obteremos a mesma transformação $F: \Pi \to \Pi_1$ se substituirmos a reta r por outra r', paralela a ela.

Quando r é perpendicular ao plano Π', diz-se que F é a *projeção ortogonal* de Π sobre Π_1. Neste caso, não é preciso especificar a reta r; basta falar em "projeção ortogonal", pois todas as retas perpendiculares ao plano Π_1 são paralelas entre si.

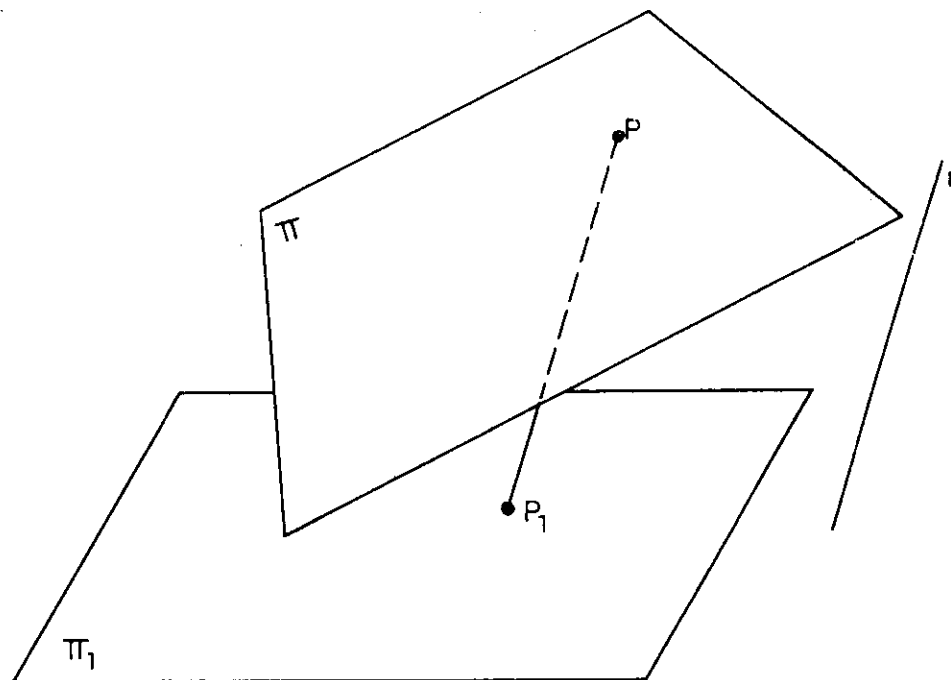



Fig. 37.1 - Projeção do plano Π sobre o plano Π_1, paralelamente à reta r.

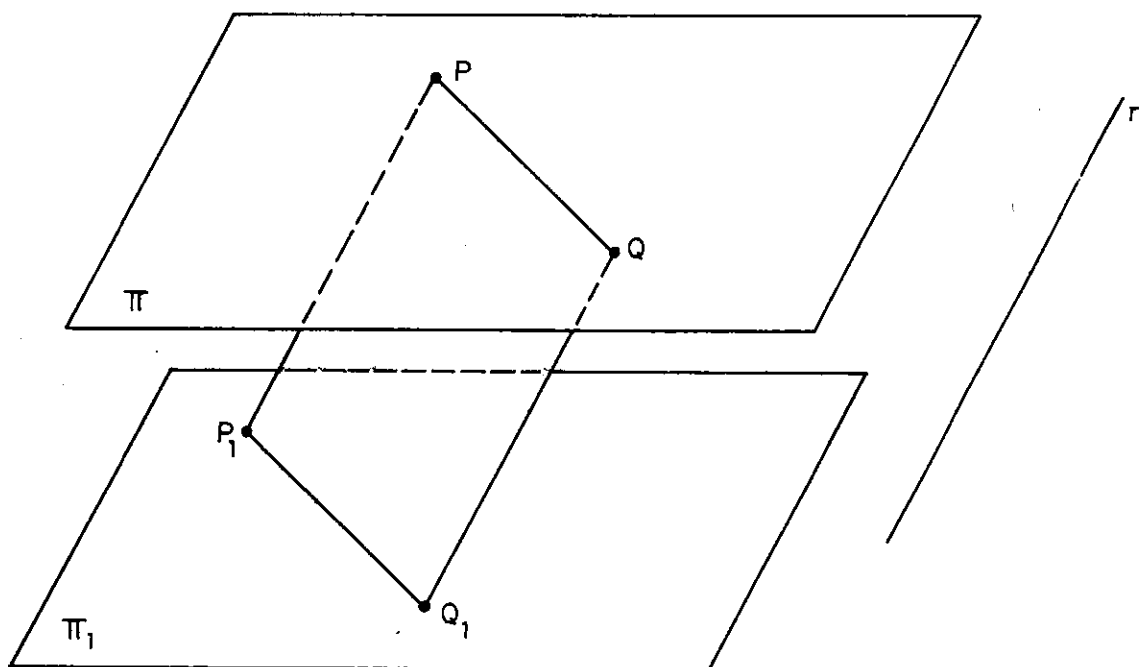



Fig. 37.2 - Se Π e Π_1 são paralelos, PQ e P_1Q_1 têm o mesmo comprimento.

Se os planos Π e Π_1 são paralelos, toda projeção $F\colon \Pi \to \Pi_1$, paralelamente a qualquer reta r, é uma isometria entre Π e Π_1, isto é, preserva distâncias.

Com efeito, neste caso, dados P e Q em Π, se $P_1 = F(P)$ e $Q_1 = F(Q)$ então PQQ_1P_1 é um paralelogramo, logo $\mathrm{d}(P_1, Q_1) = \mathrm{d}(P, Q)$.

Se os planos Π e Π_1 não são paralelos, eles se intersectam segundo uma reta s.

Nos planos Π e Π_1 consideremos respectivamente os sistemas de eixos ortogonais OXY e OXY_1, ambos com a origem O e o mesmo eixo OX, o qual coincide com a reta s.

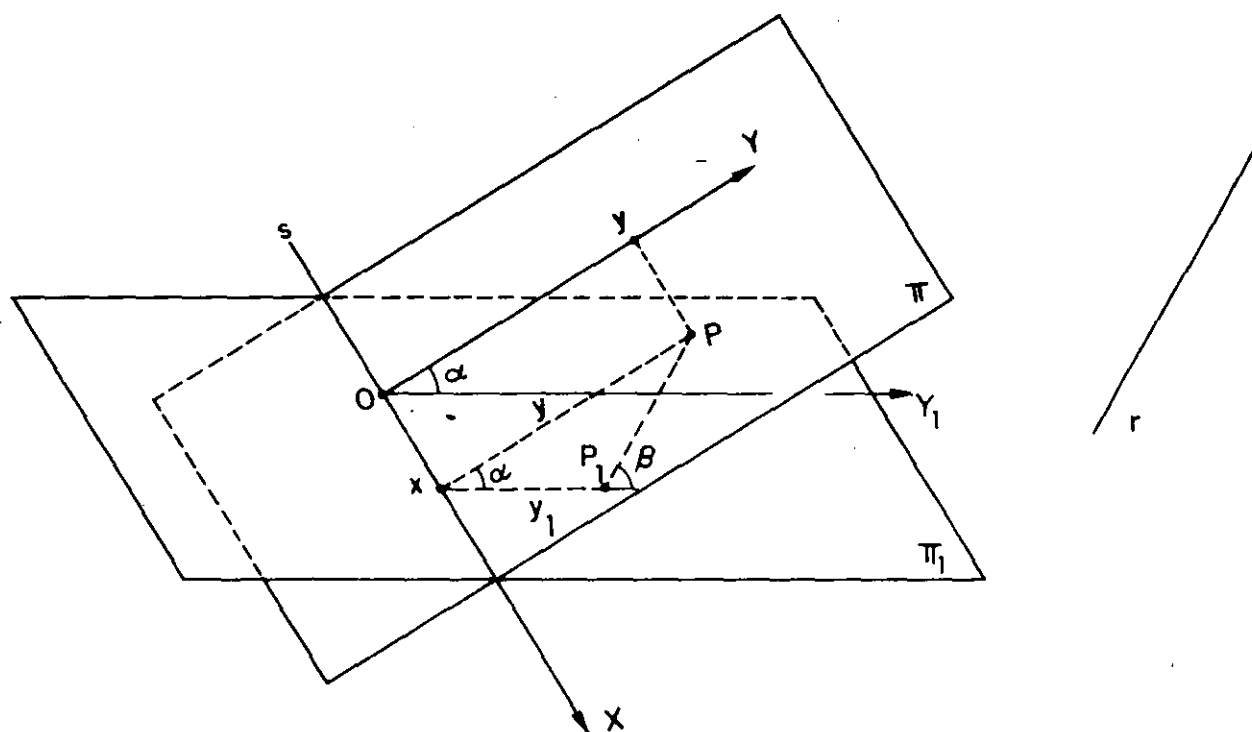



Fig. 37.3 - Obtendo as coordenadas de P_1 a partir de P.

Se o ponto P do plano Π tem coordenadas (x, y), sua imagem $P_1 = F(P)$ tem coordenadas (x_1, y_1), onde $x_1 = x$ e $y_1 = ay$, com

$$a = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta,$$

$\alpha =$ ângulo entre Π e Π_1, $\beta =$ ângulo entre r e OY_1.

As equações de F relativamente aos sistemas OXY em Π e OXY_1 em Π_1 sendo $x_1 = x$ e $y_1 = ay$, segue-se que F é uma transformação

afim.

Em particular, quando F é a projeção ortogonal de Π sobre Π_1, temos $\beta = 90°$, logo $\operatorname{cotg}\beta = 0$, $a = \cos\alpha$, e então as equações de F são $x_1 = x$ e $y_1 = y \cdot \cos\alpha$.

Note-se ainda que o determinante de F é

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta.$$

Portanto um polígono de área A em Π projeta-se em Π_1 (paralelamente a uma reta r que faz com o plano Π_1 um ângulo β) sobre um polígono cuja área é igual a $A \cdot (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta)$. Se a projeção é ortogonal, as áreas projetadas ficam multiplicadas apenas por $\cos\alpha$.

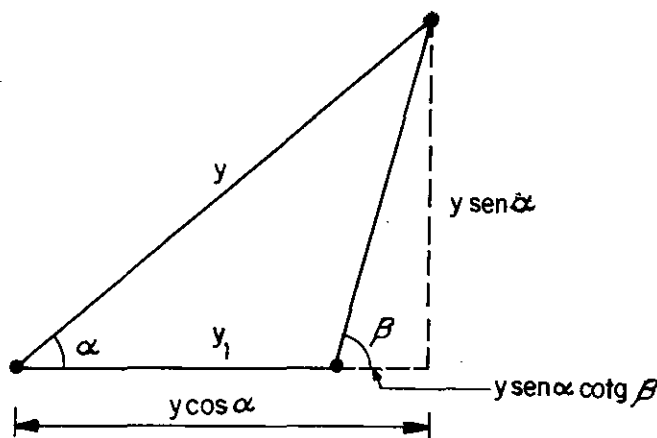



Fig. 37.4 - Um simples exercício de Trigonometria.

Um dos fatos mais conhecidos a respeito de projeções paralelas de um plano sobre outro é que a projeção de uma circunferência é uma elipse. Isto pode ser estabelecido imediatamente.

Dados os planos Π, Π_1 e a reta r, não paralela a Π nem a Π_1, seja $F: \Pi \to \Pi_1$ a projeção paralelamente a r. Se esses planos são paralelos então F é uma isometria, logo qualquer circunferência em Π se projeta por F numa circunferência de mesmo raio. Suponhamos então que os planos Π e Π_1 não sejam paralelos e que sua interseção seja a reta s.

Consideremos inicialmente uma circunferência C, de raio ρ, cujo centro O está sobre a reta s. Tomemos em Π um sistema OXY de eixos ortogonais cuja origem é O e cujo eixo OX das abcissas coincide com s. Em Π_1 tomamos outro sistema OXY_1, com a mesma origem O e mesmo eixo de abcissas OX. Sabemos que a projeção $F: \Pi \to \Pi_1$

leva um ponto $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = P_1 = (x_1, y_1)$, cujas coordenadas no sistema OXY_1 são $x_1 = x$ e $y_1 = a \cdot y$, onde a foi determinado acima.

O ponto P pertence à circunferência C se, e somente se, $x^2 + y^2 = \rho^2$. Esta igualdade equivale a

$$x_1^2 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = \rho^2, \quad \text{ou seja, a} \quad \frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{y_1^2}{(\rho a)^2} = 1 \qquad (*)$$

Portanto $P = (x, y)$ está na circunferência C se, e somente se, sua projeção $P_1 = (x_1, y_1)$ está na elipse definida pela equação $(*)$.

Se o centro de C não estiver na reta s, interseção de Π e Π_1, tomamos um novo plano Π', paralelo a Π_1, passando por esse centro. Pelo que acabamos de ver, a projeção de C sobre Π' paralelamente a r é uma elipse E'. Então a projeção de C sobre Π_1 é uma elipse E, congruente a E', concluindo a demonstração.

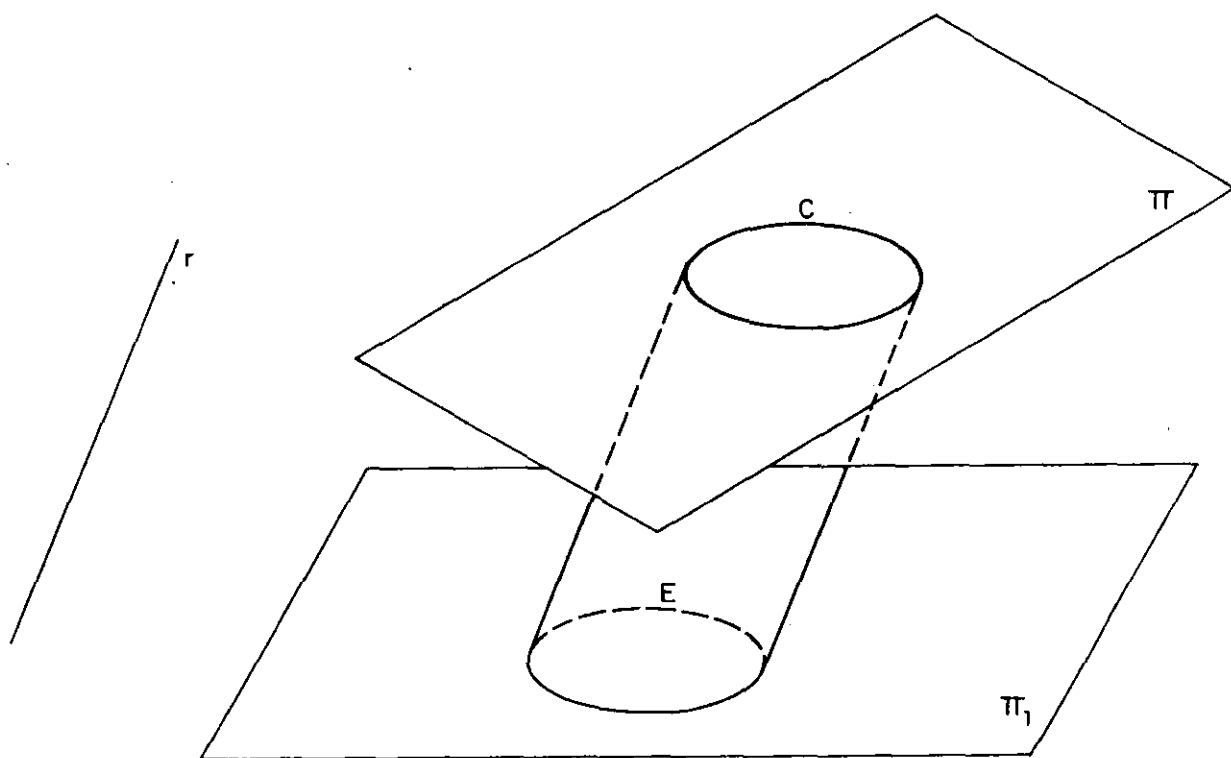



Fig. 37.5 - A projeção de Π sobre Π_1, paralelamente a r, leva a circunferência C na elipse E.

Reciprocamente, toda elipse num plano Π_1 pode ser obtida como

projeção de uma circunferência situada noutro plano Π. A projeção pode até mesmo ser tomada ortogonal a Π_1.

Com efeito, tomando no plano Π_1 um sistema de eixos OX_1Y_1 no qual OX_1 e OY_1 são os eixos da elipse, a equação dessa curva se escreve como

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

ou seja,

$$x_1^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y_1^2 = a^2.$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $b \leq a$, de modo que $0 \leq (b/a)^2 \leq 1$. Seja Π um plano que corta Π_1 ao longo do eixo OX, e forma com Π_1 um ângulo α tal que $\cos\alpha = b/a$. Em Π, consideramos um sistema OXY de eixos ortogonais com a mesma origem O, e com $OX = OX_1$.

A circunferência C, de centro O e raio a no plano Π, é formada pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^2 + y^2 = a^2$. Sua projeção ortogonal sobre Π_1 é formada pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ tais que $x_1 = x$ e $y_1 = y \cdot \cos\alpha = (b/a)y$, portanto pelos pontos (x_1, y_1) em Π_1 tais que

$$x_1^2 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right) y_1^2 = a^2,$$

ou ainda,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Assim, a elipse inicialmente considerada no plano Π_1 é a projeção ortogonal da circunferência C, situada no plano Π.

Mostraremos agora que *uma transformação afim de posto dois,* $F\colon \Pi \to \Pi$, *transforma círculos em elipses.*

Inicialmente, provaremos que existem em Π duas retas perpendiculares cujas imagens por F são também perpendiculares.

Para isso, tomamos dois pontos P, Q em Π, com $P_1 = F(P)$ e $Q_1 = F(Q)$ e consideramos uma semelhança $\sigma\colon \Pi \to \Pi$ tal que $\sigma(P_1) = P$ e $\sigma(Q_1) = Q$. Então

$$G = \sigma \circ F\colon \Pi \to \Pi$$

é uma transformação afim tal que $G(P) = P$ e $G(Q) = Q$. Portanto G deixa fixo todos os pontos da reta $r = PQ$, isto é, se R pertence a r então $G(R) = R$. Basta provarmos que G transforma algum par de retas perpendiculares em retas perpendiculares, pois temos $F = \sigma^{-1} \circ G$ e a semelhança σ^{-1} preserva ângulos.

Tomemos um ponto A fora da reta r; seja $A_1 = G(A)$. Se $A_1 = A$ então G é a transformação identidade e não há mais o que provar. Seja então $A \neq A_1$. Se AA_1 for perpendicular a r então as retas perpendiculares r e AA_1 são transformadas em si mesmas por G e, novamente, nosso trabalho acabou.

Suponhamos, então, que AA_1 não seja perpendicular a r. Então a mediatriz do segmento AA_1 encontra r num ponto O.

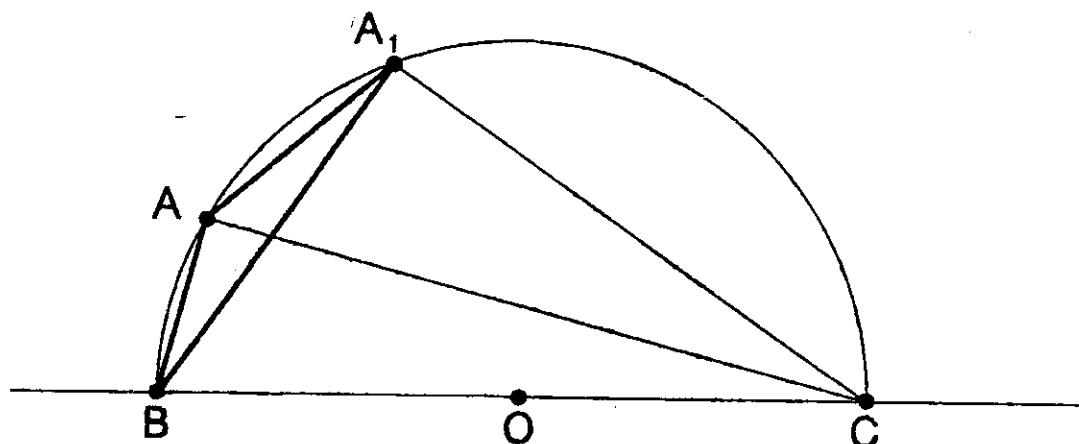



Fig. 37.6 - F leva as perpendiculares AB, AC nas perpendiculares A_1B, A_1C.

A circunferência de centro O que contém A e A_1 corta a reta r nos pontos B e C. Os ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{A_1}C$, inscritos na semicircunferência BAA_1C, são retos, logo as retas BA e AC, assim como BA_1 e A_1C, são perpendiculares. Como F deixa B, C fixos e leva A em A_1, segue-se que as perpendiculares BA e AC são levadas por F nas perpendiculares BA_1 e A_1C.

Como estamos tratando aqui de Geometria Analítica, vamos demonstrar, agora usando coordenadas, que *uma transformação afim de posto dois* $F\colon \Pi \to \Pi_1$ *leva algum par de retas perpendiculares em* Π *noutro par de retas perpendiculares em* Π_1.

Começamos tomando sistemas de eixos ortogonais OXY em Π e $O_1X_1Y_1$ em Π_1, com $O_1 = F(O)$ e $O_1X_1 = F(OX)$.

Então F transforma o ponto $P = (x, y)$ em Π no ponto $P_1 =$

(x_1, y_1) em Π_1, onde $x_1 = ax + by$ e $y_1 = cx + dy$. A condição $O_1X_1 = F(OX)$ significa que $y = 0 \Rightarrow y_1 = 0$. Logo $c = 0$ e as equações de F são $x_1 = ax + by$, $y_1 = dy$.

Tomando o ponto $P = (x, y)$ sobre a circunferência de centro O e raio 1, temos $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$. Então o ponto

$$P^* = (-y, x) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

é tal que os segmentos OP e OP^* são perpendiculares.

Afirmamos que o ângulo θ pode ser escolhido de tal maneira que os segmentos O_1P_1 e $O_1P_1^*$, imagens de OP e OP^* por F, sejam também perpendiculares. Ora, temos $P_1 = (ax+by, dy)$ e $P_1^* = (-ay+bx, dx)$. A condição para que O_1P_1 e $O_1P_1^*$ sejam perpendiculares é que o produto interno dos vetores $\overrightarrow{O_1P_1}$ e $\overrightarrow{O_1P_1^*}$ seja zero, isto é, que:

$$(ax + by)(-ay + bx) + d^2xy = 0$$

ou

$$(b^2 - a^2 + d^2)xy + ab(x^2 - y^2) = 0. \qquad (*)$$

Lembrando que $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ e fazendo uso das identidades

$$\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}, \quad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta),$$

a igualdade $(*)$ se escreve

$$\frac{b^2 - a^2 + d^2}{ab} = -2\frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = -2\operatorname{cotg}(2\theta).$$

Bem entendido, a igualdade acima só faz sentido quando $ab \neq 0$. Mas se for $ab = 0$ então, tomando $P = (1, 0)$ e $P^* = (0, 1)$, donde $P_1 = (a, 0)$ e $P_1^* = (b, d)$, os vetores $\overrightarrow{O_1P_1}$ e $\overrightarrow{O_1P_1^*}$ serão ortogonais e as retas O_1P_1 e $O_1P_1^*$ serão perpendiculares.

Se $ab \neq 0$, como a cotangente assume todos os valores reais, podemos escolher θ de maneira que a igualdade pretendida se verifique, o que prova a existência em Π de retas perpendiculares cujas imagens por F são perpendiculares em Π_1.

Assim, dada a transformação afim $F\colon \Pi \to \Pi_1$, de posto dois, podemos tomar sistemas de eixos ortogonais OXY em Π e $O_1X_1Y_1$ em Π_1, tais que $F(OX) = O_1X_1$, $F(OY) = O_1Y_1$, donde $F(O) = O_1$.

Então F transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ com $x_1 = ax$, $y_1 = by$.

Uma circunferência de centro O e raio c, cuja equação é $x^2 + y^2 = c^2$, é transformada por F no conjunto dos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ do plano Π_1 tais que $x = x_1/a$ e $y = y_1/b$, logo

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = c^2,$$

ou seja

$$\frac{x_1^2}{(ac)^2} + \frac{y_1^2}{(bc)^2} = 1.$$

Esse conjunto é uma elipse.

As retas perpendiculares r e s em Π, que são transformadas por F num par de retas perpendiculares em Π_1, podem ser tomadas se encontrando num ponto O qualquer de Π. Com efeito, se r e s se encontram noutro ponto O', traçamos por O as retas OX e OY paralelas a r e s respectivamente (logo perpendiculares uma à outra). Como F leva retas paralelas em retas paralelas, as imagens por F de OX e OY ainda são perpendiculares.

Por isso, no argumento acima, não é perda de generalidade supor que o centro da circunferência considerada é a origem O do sistema de eixos ortogonais.

Assim, podemos afimar que toda transformação afim de posto dois $F: \Pi \to \Pi_1$ leva uma circunferência qualquer do plano Π numa elipse do plano Π_1.

Daí resulta que F transforma qualquer elipse E contida em Π numa elipse E_1 em Π_1 porque E é a imagem de uma circunferência C por uma transformação afim $G: \Pi \to \Pi$. A transformação afim $F \circ G$ leva a circunferência C numa elipse E, logo $G^{-1} \circ (G \circ F) = F$ leva E em E_1.

O mesmo argumento usado acima (um par de eixos ortogonais transformado por F noutro par de eixos ortogonais) permite concluir, mais geralmente, que

Toda transformação afim de posto dois leva elipses em elipses, hipérboles em hipérboles e parábolas em parábolas.

38. Como reconhecer transformações afins

Uma transformação afim leva retas em retas e, se for bijetiva, leva retas paralelas em retas paralelas.

É natural perguntar se toda transformação bijetiva entre dois planos, que leva retas em retas, é necessariamente afim.

O objetivo desta seção é responder positivamente a esta pergunta.

Uma bijeção $F: \Pi \to \Pi_1$ chama-se uma *colineação* quando transforma pontos colíneares do plano Π em pontos colineares no plano Π_1.

A imagem $r_1 = F(r)$ *de uma reta* r *pela colineação* $F: \Pi \to \Pi_1$ *é uma reta do plano* Π_1.

Para provar a afirmação acimã, consideremos dois pontos distintos A e B em r e suas imagens $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$. Mostraremos que a reta $r_1 = A_1B_1$ é a imagem de r por F.

Em primeiro lugar, se $C \in r$ e $C_1 = F(C)$ então A, B e C são colineares, logo A_1, B_1 e C_1 são colineares, portanto $C_1 \in r_1$. Isto mostra que $F(r) \subset r_1$.

Para mostrar que $F(r) = r_1$, tomamos um ponto arbitrário P_1 em r_1. Como F é bijetiva, existe um único ponto P no plano Π tal que $F(P) = P_1$. Afirmamos que P está em r. Com efeito, se P não pertencesse a r, os pontos A, B e P formariam um triângulo.

As imagens por F das retas AB, BP e AP estão contidas em r_1 pois A_1, B_1 e P_1 estão em r_1. Qualquer ponto Q do plano Π pertence a uma reta s que corta o triângulo ABP em dois pontos distintos. Esses pontos são levados por F em pontos de r_1, logo $F(Q) \in r_1$. Então todos os pontos do plano Π seriam levados por F em pontos da reta r_1, contradizendo que F seja sobrejetiva. Isto conclui a prova de que uma colineação transforma uma reta noutra reta.

Além disso, se as retas r *e* s *são paralelas no plano* Π, *suas imagens* r_1 *e* s_1 *são também paralelas no plano* Π_1.

Com efeito, se existisse algum ponto P_1 comum a r_1 e s_1 então seria $P_1 = F(P)$, com $P \in r$ e $P \in s$, em contradição com o fato de que r

e s são paralelas.

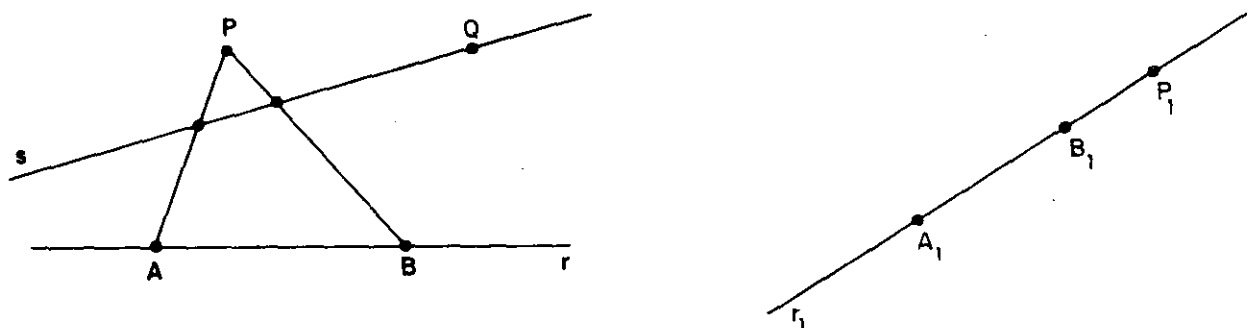



Fig. 38.1 - Uma colineação que levasse os três vértices de um triângulo em três pontos não colineares não seria sobrejetiva.

Se $F: \Pi \to \Pi_1$ é uma colineação, sua inversa $F^{-1}: \Pi_1 \to \Pi$ também é uma colineação.

Com efeito, se não fosse assim, existiriam três pontos colineares $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$ e $C_1 = F(C)$ em Π_1 tais que A, B e C seriam não-colineares. Como acabamos de ver, isto implicaria que F transformaria todos os pontos do plano Π em pontos da reta r_1 que contém os pontos A_1, B_1 e C_1, logo F não seria sobrejetiva.

A demonstração do teorema principal desta seção fará uso do seguinte

Lema. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$f(s+t) = f(s) + f(t) \quad e \quad f(s \cdot t) = f(s) \cdot f(t)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$. Então, ou $f(t) = t$ para todo número real t ou f é identicamente nula.

Demonstração: Dada f como no enunciado, temos

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \text{ logo } f(0) = 0.$$

Além disso, de $s = (s-t) + t$ vem

$$f(s) = f((s-t) + t) = f(s-t) + f(t), \text{ logo}$$
$$f(s-t) = f(s) - f(t).$$

Em particular, $f(-t) = -f(t)$. Se $f(1) = 0$ então, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$f(t) = f(t \cdot 1) = f(t) \cdot f(1) = 0,$$

logo f é identicamente nula.

Suponhamos, de agora por diante, que f não seja identicamente nula, logo $f(1) \neq 0$. Então

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1), \quad \text{donde} \quad f(1) = 1.$$

Daí

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3 \ldots$$

E assim por diante: $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais geralmente, se $n \in \mathbb{N}$ então $f(-n) = -f(n) = -n$, logo $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ainda supondo f não identicamente nula, se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ então $m = (m/n) \cdot n$, logo:

$$m = f(m) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n,$$

portanto $f(m/n) = m/n$.

Assim, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre as condições $f(s+t) = f(s) + f(t)$ e $f(st) = f(s) \cdot f(t)$, e não é identicamente nula, é tal que $f(r) = r$ para todo número racional r.

Além disso, $t \neq 0$ implica $t \cdot (1/t) = 1$, logo $f(t) \cdot f(1/t) = 1$, portanto $f(t) \neq 0$. Mais ainda: se $t > 0$ então $f(t) > 0$. Com efeito, $t > 0$ implica $t = a^2$, com $a \neq 0$, logo

$$f(t) = f(a^2) = f(a)^2 > 0.$$

Assim, f transforma números positivos em números positivos.

Daí resulta que f é uma função crescente, isto é, $s < t$ implica $f(s) < f(t)$. De fato, $s - t$ significa $t - s > 0$, logo $f(t) - f(s) = f(t - s) > 0$ e daí $f(s) < f(t)$.

Sabemos que $f(r) = r$ para todo r racional. Tomemos agora um número irracional α. Suponhamos, por absurdo, que se tivesse $f(\alpha) \neq \alpha$. Para fixar idéias, suponhamos $f(\alpha) < \alpha$. (A outra possibilidade,

$f(\alpha) > \alpha$, se trata de modo análogo.) Então existe um número racional r tal que

$$f(\alpha) < r < \alpha. \qquad (*)$$

Em particular, temos $r < \alpha$. Sendo f crescente, daí resulta $f(r) < f(\alpha)$ ou seja, $r < f(\alpha)$, em contradição com a primeira das igualdades $(*)$ acima.

Isto conclui a prova do Lema. Passemos em seguida ao

Teorema. *Toda colineação é uma transformação afim.*

Demonstração: Seja $F: \Pi \to \Pi_1$ uma colineação. Indiquemos com $V(\Pi)$ e $V(\Pi_1)$ respectivamente os conjuntos dos vetores do plano Π e do plano Π_1. A partir de F, definiremos uma transformação

$$\varphi: V(\Pi) \to V(\Pi_1),$$

que leva vetores do plano Π em vetores do plano Π_1. Dado o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, escrevamos $A_1 = F(A)$ e $B_1 = F(B)$. A definição de φ é

$$\varphi(v) = \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_1B_1}.$$

Como $B = A + v$, esta definição equivale a pôr

$$F(A + v) = A_1 + \varphi(v).$$

Precisamos mostrar que, assim procedendo, estamos definindo φ sem ambigüidade, isto é, que se o vetor v for representado por um segmento orientado CD equipolente a AB, teremos ainda $\varphi(\overrightarrow{CD}) = \varphi(\overrightarrow{AB})$, ou seja, se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então ,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1},$$

onde $C_1 = F(C)$, $D_1 = F(D)$.

Com efeito, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ significa que A, B, D, C são vértices consecutivos de um paralelogramo. Como a colineação F leva retas paralelas em retas paralelas, segue-se que $A_1B_1C_1D_1$ também é um paralelogramo

com seus vértices citados consecutivamente, logo $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

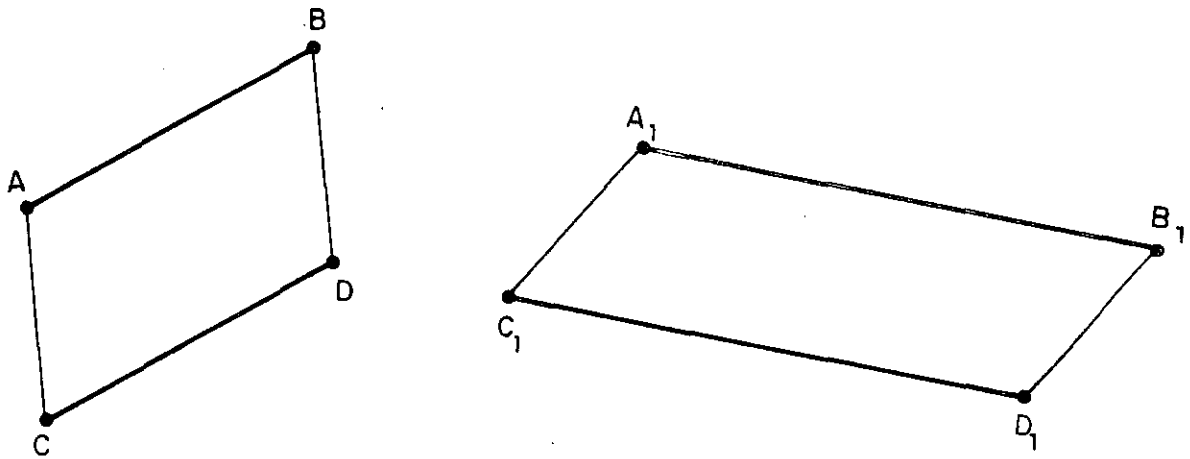



Fig. 38.2

Portanto, a transformação $\varphi: V(\Pi) \rightarrow V(\Pi_1)$ está bem definida. Mostraremos que φ é uma *transformação linear*, isto é, tem as seguintes propriedades, para quaisquer $v, w \in V(\Pi)$ e $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w); \tag{1}$$
$$\varphi(t \cdot v) = t \cdot \varphi(v). \tag{2}$$

A propriedade (1) é imediata: se $v = \overrightarrow{AB}$, pomos $w = \overrightarrow{BC}$. Então $v + w = \overrightarrow{AC}$. Escrevendo $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$ e $C_1 = F(C)$ vem:

$$\varphi(v + w) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \varphi(v) + \varphi(w).$$

A propriedade (2) é obvia se $v = 0$. Dado $v = \overrightarrow{AB} \neq 0$, temos $t \cdot v = \overrightarrow{AC}$, com A, B e C colineares, logo A_1, B_1 e C_1 são colineares. Assim, existe $t' \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{A_1C_1} = t \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$, logo

$$\varphi(t \cdot v) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A_1C_1} = t' \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = t' \cdot \varphi(v).$$

Devemos provar que $t' = t$ a fim de que tenhamos $\varphi(t \cdot v) = t \cdot \varphi(v)$. Começamos observando que t' depende apenas do número t mas não

do vetor $v \neq 0$. Ou seja, se w é outro vetor qualquer, tem-se ainda $\varphi(t \cdot w) = t' \cdot \varphi(w)$ com os mesmos números t e t'. Para mostrar isso,

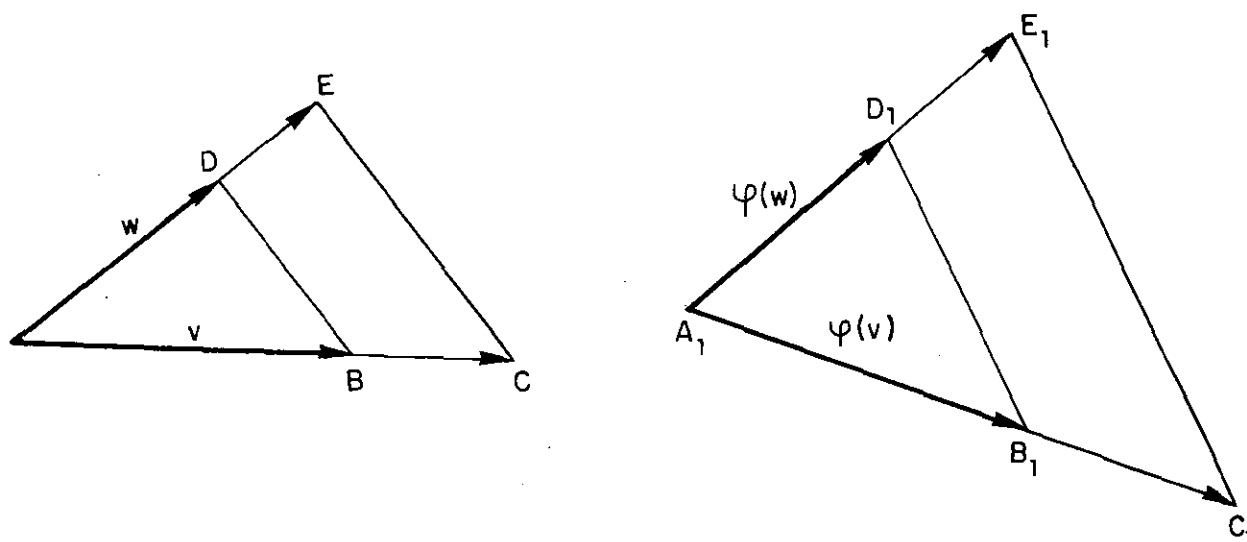



Fig. 38.3

suponhamos primeiro que os vetores v e w não sejam múltiplos um do outro. Sejam $v = \overrightarrow{AB}$, $t \cdot v = \overrightarrow{AC}$, $w = \overrightarrow{AD}$ e $t \cdot w = \overrightarrow{AE}$. As retas BD e CE são paralelas. Como F preserva o paralelismo, as retas B_1D_1 e C_1E_1 também são paralelas. Logo

$$\overrightarrow{A_1C_1} = t' \cdot \overrightarrow{A_1B_1} \quad \text{implica} \quad \overrightarrow{A_1E_1} = t' \cdot \overrightarrow{A_1D_1},$$

ou seja, $\varphi(t \cdot v) = t' \cdot \varphi(v)$ implica $\varphi(t \cdot w) = t' \cdot \varphi(w)$.

Se, entretanto, w for múltiplo de v, tomamos um vetor u não colinear com v. Pelo que acabamos de mostrar, temos

$$\varphi(t \cdot u) = t' \cdot \varphi(u)$$

e, pelo mesmo motivo, $\varphi(t \cdot w) = t' \cdot \varphi(w)$.

Escrevendo $t' = f(t)$, fica então definida uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ caracterizada pela igualdade

$$\varphi(t \cdot v) = f(t) \cdot \varphi(v),$$

válida para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo vetor $v \neq 0$ em Π.

Mostraremos em seguida que se tem

$$f(s + t) = f(s) + f(t) \quad \text{e} \quad f(s \cdot t) = f(s) \cdot f(t).$$

Como é obvio que f não é identicamente nula, seguir-se-á então do Lema que $f(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ora, tomando $v \neq 0$ em Π temos

$$\varphi((s+t)v) = \varphi(sv+tv) = \varphi(sv) + \varphi(tv) =$$
$$= f(s) \cdot \varphi(v) + f(t) \cdot \varphi(v) = (f(s) + f(t)) \cdot \varphi(v)$$

e, por outro lado,

$$\varphi((s+t) \cdot v) = f(s+t) \cdot \varphi(v).$$

Segue-se que $f(s+t) = f(s) + f(t)$.

Além disso,

$$\varphi(st \cdot v) = \varphi(s(tv)) = f(s) \cdot \varphi(tv) = f(s) \cdot f(t) \cdot \varphi(v)$$

e, por outro lado,

$$\varphi(st \cdot v) = f(st) \cdot \varphi(v).$$

Portanto $f(st) = f(s) \cdot f(t)$.

Estabelecida a linearidade da transformação $\varphi: V(\Pi) \to V(\Pi_1)$, passamos (finalmente!) à conclusão da prova de que a colineação $F: \Pi \to \Pi_1$ é uma transformação afim.

Dados os pontos A, B em Π e o número real t, sejam $A_1 = F(A)$ e $B_1 = F(B)$. Devemos provar que

$$F((1-t)A + tB) = (1-t)A_1 + tB_1,$$

ou seja, que

$$F(A + t \cdot \overrightarrow{AB}) = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1B_1}.$$

Ora,

$$F(A + t \cdot \overrightarrow{AB}) = A_1 + \varphi(t \cdot \overrightarrow{AB}) = A_1 + t \cdot \varphi(\overrightarrow{AB}) =$$
$$= A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1B_1},$$

quod erat demonstrandum.

Portanto, uma bijeção $F: \Pi \to \Pi_1$ entre dois planos é uma transformação afim se, e somente se, leva pontos colineares de Π em pontos colineares de Π_1.

Exercícios da Terceira Parte

25.1 Sejam $S, T\colon \Pi \to \Pi$ isometrias do plano Π. Prove que a transformação composta $S \circ T\colon \Pi \to \Pi$, definida por $(S \circ T)(P) = S(T(P))$, ainda é uma isometria. Prove também que a transformação inversa $T^{-1}\colon \Pi \to \Pi$, definida por $T^{-1}(Q) = P$ se $T(P) = Q$, é uma isometria.

25.2 A partir das definições, prove que toda translação é uma isometria.

25.3 Fixado o sistema de eixos ortogonais OXY no plano, considere a translação T_v, com $v = (2, 3)$. Qual é a imagem da reta $4x - 3y = 1$ por essa translação?

25.4 Qual é a imagem da reta $ax + by = c$ pela translação T_v, com $v = (\alpha, \beta)$?

25.5 Prove que a composta $T_u \circ T_v$ de duas translações é a translação T_w onde $w = u + v$ e que a inversa de T_v é a translação T_z, onde $z = -v$.

25.6 Prove que a translação T_v, com $v = (\frac{b}{2a}, (b^2 - 4ac)/4a)$, leva a curva $y = ax^2 + bx + c$ na curva $y = ax^2$.

25.7 Fixado o sistema de eixos ortogonais OXY no plano, considere as isometrias R, S e T definidas por $R(x, y) = (-y, x)$, $S(x, y) = ((x - y)/\sqrt{2}, (x + y)/\sqrt{2})$ e $T(x, y) = (x + 1, y - 1)$.

(a) Identifique geometricamente R, S e T;

(b) Em quais figuras cada uma delas transforma a circunferência $x^2 + y^2 = 1$?

(c) Mesma pergunta para as retas $y = x$ e $y = x + 1$.

(d) Mostre que $R \circ S = S \circ R$ mas $R \circ T \neq T \circ R$ e $S \circ T \neq T \circ S$.

25.8 Dê as equações de uma isometria que transforme a reta $y = 2x + 1$ no eixo horizontal.

25.9 Use diretamente as equações de uma isometria T, com $T(x, y) =$

(x_1, y_1) e $T(0,0) = (a,b)$, para mostrar que se $x^2 + y^2 = r^2$ então $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$. Interprete geometricamente.

26.1 Prove que a simetria (rotação de 180°) em torno do ponto A, seguida da simetria em torno do ponto B é igual à translação pelo vetor $2\overrightarrow{AB}$.

26.2 Se R e S são rotações com centro no mesmo ponto, prove que $R \circ S = S \circ R$.

26.3 Se R e S são rotações diferentes da identidade, com centros em pontos distintos do plano, prove que $R \circ S \neq S \circ R$.

26.4 Suponha que, relativamente a um sistema de eixos ortogonais fixado, a transformação R leve o ponto $P = (x,y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, com $x_1 = ax - by$ e $y_1 = bx + ay$, enquanto que a transformação S leva o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ no ponto $P_2 = S(P_1) = (x_2, y_2)$, onde $x_2 = cx_1 - dy_1$, $y_2 = dx_1 + cy_1$. Determine as coordenadas (u,v) do ponto $Q = S(R(P))$, onde $P = (x,y)$.

26.5 Use as equações para provar que a composta de duas rotações de mesmo centro O e ângulos α e β é a rotação de centro O e ângulo $\alpha + \beta$.

26.6 Ainda usando as equações, e o fato de a composta de uma rotação de ângulo α com uma translação ser uma rotação de mesmo ângulo α com outro centro, mostre que a composta de duas rotações, uma de ângulo α e centro A, outra de ângulo β e centro B, é uma rotação de ângulo $\alpha + \beta$ e centro num terceiro ponto C, salvo se $\alpha + \beta = 360°$, caso em que a transformação composta é uma translação.

26.7 Submeta a curva $ax^2 + 2bxy + ay^2 = c$ a uma rotação de 45° em torno de O e a identifique. É possível escolher $b \neq 0$ de modo que essa curva seja uma circunferência?

26.8 Seja $T\colon \Pi \to \Pi$ uma transformação com a seguinte propriedade: para cada par de pontos A, B no plano Π, com $A_1 = T(A)$ e $B_1 = T(B)$ o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado B_1A_1. Prove que T é a rotação de 180° em torno de algum ponto de Π.

27.1 Se T é a reflexão em torno de uma reta, prove que $T = T^{-1}$.

27.2 Sejam S e T reflexões. Prove em duas linhas (no máximo) que $S \circ T$ não pode ser uma reflexão.

27.3 Se R e S são reflexões em torno das retas paralelas r e s, prove que $S \circ R$ é a translação de vetor $v = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, com $A \in r$, $B \in s$ e $AB \perp r$.

27.4 Sejam R e S as reflexões em torno das retas r e s respectivamente e α o ângulo da reta r para a reta s. Prove que a composta $S \circ R$ é a rotação de ângulo 2α e centro no ponto de interseção de r com s. Observe que $R \circ S$ é a rotação de mesmo centro e ângulo -2α, em coerência com o fato de que $R \circ S = (S \circ R)^{-1}$.

27.5 Prove que toda isometria do plano é uma reflexão, a composta de duas reflexões ou a composta de três reflexões.

27.6 Mostre que se R é uma reflexão com deslizamento então, para cada ponto P do plano, o ponto médio do segmento PP_1, com $P_1 = R(P)$, está sobre o eixo de reflexão.

27.7 Se a isometria T não é uma reflexão com deslizamento então as mediatrizes dos segmentos PP_1, $P_1 = T(P)$, passam todas pelo mesmo ponto, ou são todas paralelas.

27.8 Sejam R e S as reflexões em torno das retas r e s, que se encontram no ponto O e formam entre si um ângulo de $45°$. Prove que, para todo ponto P do plano, O é o ponto médio do segmento que liga $R(S(P))$ a $S(R(P))$.

27.9 Sejam R e S reflexões em torno das retas r e s. Prove que se $R \circ S = S \circ R$ então as retas r e s são perpendiculares ou coincidem.

27.10 Sejam R a reflexão em torno da reta r e T a translação por um vetor paralelo a r. Mostre que $T \circ R = R \circ T$.

27.11 Seja R uma reflexão com deslizamento. Que são as compostas $R \circ R$, $R \circ R \circ R$ etc?

27.12 Sejam ABC e $A_1B_1C_1$ triângulos congruentes porém com orientações opostas. Determinar a reflexão com deslizamento que transforma um deles no outro. (Lembre que o eixo da reflexão com deslizamento que leva A em A_1, B em B_1 e C em C_1 contém os pontos médios dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1.)

27.13 Sejam A e B pontos do mesmo lado da reta r. Determinar o ponto X sobre r tal que a soma $\mathrm{d}(A, X) + \mathrm{d}(X, B)$ seja mínima.

27.14 Dados os pontos A, B em lados opostos da reta r, determinar o ponto Y sobre r tal que a diferença $\mathrm{d}(A, Y) - \mathrm{d}(B, Y)$ seja máxima.

27.15 Sejam R a rotação de centro A e ângulo α e S a rotação de centro B e ângulo β. Prove que, se $\alpha + \beta$ não é $360°$ então $R \circ S$ é a rotação de ângulo $\alpha + \beta$ e centro no ponto C tal que o ângulo de AB para AC é $\alpha/2$ e o ângulo de BC para AB é $\beta/2$. [Exprima R e S como compostas de reflexões em torno de lados do triângulo ABC.]

27.16 Com a notação do exercício anterior, prove que, se $\alpha+\beta = 360°$ então $R \circ S$ é a translação T_v, onde $v = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ é perpendicular a AC e o ângulo de AB para AC é $\alpha/2$.

27.17 A figura X diz-se *simétrica* em relação à reta r, e r chama-se um *eixo de simetria* de X quando, para todo ponto P em X, seu simétrico P' em relação a r também pertence a X. Prove:

(a) Toda elipse é simétrica em relação a seus eixos principais.
(b) Se T é a reflexão em torno da reta r então, para todo subconjunto X do plano, $Y = X \cup T(X)$ é um conjunto simétrico em relação a r.

27.18 Determine os eixos de simetria das seguintes figuras:
a) Um triângulo isósceles;
b) Um triângulo equilátero;
c) Um triângulo escaleno;
d) Um quadrado;
e) Uma circunferência.

27.19 Prove que uma figura limitada (isto é, contida em algum polígono) não pode ter dois eixos de simetria paralelos.

27.20 Uma figura X diz-se *simétrica* em relação ao ponto O quando o simétrico P' de cada ponto P de X em relação a O ainda é um ponto pertencente a X. (Noutras palavras se $P \in X$ e O é o ponto médio do segmento PP' então P' pertence a X.) Neste caso, O chama-se um *centro de simetria* de X. Prove:
(a) Todo ponto de uma reta é centro de simetria dessa reta.

(b) Uma figura com mais de um centro de simetria é ilimitada e tem uma infinidade de centros de simetria.
(c) A interseção de dois eixos de simetria perpendiculares é um centro de simetria.
(d) A interseção dos eixos de simetria de um triângulo equilátero não é um centro de simetria.

27.21 Determine os eixos de simetria e os centros de simetria das seguintes figuras:
(a) Uma parábola;
(b) Uma hipérbole;
(c) A grade G, reunião de todas as retas horizontais com ordenadas inteiras e todas as retas verticais também com ordenadas inteiras.

27.22 Uma *simetria* de uma figura plana X é uma isometria T do plano tal que $T(X) = X$. Mostre que há seis simetrias de um triângulo equilátero, oito simetrias de um quadrado, infinitas simetrias de uma circunferência, quatro simetrias de uma elipse, duas simetrias de um triângulo isósceles e uma única simetria de um triângulo escaleno. (Não esqueça a transformação identidade.)

27.23 As simetrias de uma figura X constituem um *grupo*, no sentido de que a composta de duas simetrias de X, a inversa de uma simetria de X e a transformação identidade são simetrias de X. Dê nomes às oito simetrias do quadrado e elabore uma tabela de multiplicação com elas, onde multiplicar significa tomar a composta.

27.24 Se uma isometria $T: \Pi \to \Pi$ deixa fixos os pontos A e B do plano (isto é, $T(A) = A$ e $T(B) = B$) prove que T deixa fixos todos os pontos da reta AB. Quanto aos pontos P fora da reta AB, prove que ou $T(P) = P$ ou então $T(P)$ é o ponto P_1, simétrico de P em relação à reta AB (ou seja, AB é a mediatriz de PP_1). No primeiro caso T preserva orientação e no segundo caso T inverte. Conclua que se $S, T: \Pi \to \Pi$ são isometrias tais que $S(A) = T(A)$ e $S(B) = T(B)$ com $A \neq B$ então ou $S = T$ ou então S é a composta de T com a reflexão em torno da reta AB.

27.25 Prove que duas isometrias que coincidem nos vértices de um triângulo são iguais.

27.26 Prove que, dados os pontos A, B, A_1 e B_1 no plano Π, com $d(A,B) = d(A_1,B_1) > 0$, existem exatamente duas isometrias $S,T\colon \Pi \to \Pi$ que levam A, B em A_1, B_1 respectivamente. Uma delas preserva e a outra inverte orientação. Se $AB//A_1B_1$, S é uma translação e T é uma translação com deslizamento. Se as retas AB e A_1B_1 não são paralelas, S é uma rotação e T é a rotação que leva AB em A_1B_1 seguida da reflexão em torno de A_1B_1, ou seja, T é a reflexão em torno da bissetriz do ângulo formado pelas retas AB e A_1B_1.

27.27 Prove que, dados dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, tais que $d(A,B) = d(A_1,B_1)$, $d(A,C) = d(A_1,C_1)$ e $d(B,C) = d(B_1,C_1)$, existe uma única isometria T do plano que os contém tal que $T(A) = A_1$, $T(B) = B_1$ e $T(C) = C_1$.

27.28 Supondo que $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB}$, descreva as isometrias T do plano tais que $T(A) = A_1$ e $T(B) = B_1$.

27.29 Sejam T uma rotação de centro O. Dada arbitrariamente uma reta r que passa por O, prove que existe uma única reta s, também passando por O, tal que T é a composta das reflexões em torno das retas r e s.

27.30 Quando é que uma reflexão comuta com uma translação? (Noutras palavras, se $T = T_v$ é a translação de vetor v e R é a reflexão em torno da reta r, quando é que $R \circ T = T \circ R$?

27.31 Quais são as coordenadas do simétrico do ponto $P = (3,8)$ em relação à reta $x - 2y = 2$?

27.32 Qual a isometria do plano que consiste na reflexão em torno da reta $y = x$ composta com a reflexão em torno do eixo vertical?

27.33 Sejam A e B pontos situados fora da reta r. Determinar o ponto C dessa reta de tal modo que o caminho que sai de A, passa por C, percorre uma distância d ao longo de r e termina em B, seja o mais curto possível.

28.1 Em termos das coordenadas relativas a um sistema de eixos ortogonais fixado no plano Π, sejam $S,T\colon \Pi \to \Pi$ as transformações tais que $S(x,y) = (1 - 3y, 2 + 3x)$ e $T(x,y) = (1 - 2x, 5 + 2y)$. Mostre que S e T são semelhanças.

28.2 Seja $T: \Pi \to \Pi$ uma transformação do plano Π com a seguinte propriedade: existem dois sistemas de eixos ortogonais OXY e $O'X'Y'$ tais que T transforma todo ponto P de coordenadas (x, y) no primeiro sistema num ponto P_1 cujas coordenadas no segundo sistema são (rx, ry). Prove que T é uma semelhança de razão r.

28.3 Dados os números reais m, n, p e q, com $m^2 + n^2 > 0$, e fixado um sistema de eixos ortogonais OXY no plano Π, defina uma transformação $T: \Pi \to \Pi$, pondo $T(x, y) = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = mx - ny + p$ e $y_1 = nx + my + q$. Prove que T é uma semelhança.

28.4 Com as mesmas notações do exercício anterior, defina $S: \Pi \to \Pi$ pondo $S(x, y) = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = mx + ny + p$ e $y_1 = nx - my + q$. Prove que S é uma semelhança.

28.5 Prove que a semelhança T do Exercício 28.3 preserva a orientação enquanto a semelhança S do Exercício 28.4 inverte a orientação do plano.

28.6 Fixados um sistema de eixos ortogonais OXY e um número $a \neq 0$, considere a semelhança $\sigma(x, y) = (ax, ay)$. Mostre que σ transforma a parábola $y = ax^2$ na parábola $y = x^2$. Use um exercício da seção 25 para concluir que duas parábolas quaisquer são figuras semelhantes.

28.7 Prove que uma semelhança de razão r transforma toda figura de área a numa figura de área ar^2.

28.8 Prove que uma semelhança transforma circunferências em circunferências, elipses em elipses, parábolas em parábolas e hipérboles em hipérboles.

28.9 Prove que duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes (isto é, que existe uma semelhança transformando uma na outra).

28.10 Em que condições duas elipses ou duas hipérboles são figuras semelhantes?

29.1 Dado o sistema de eixos ortogonais OXY, ache a equação da reta e da circunferência em que são transformadas a reta $3x - 2y = 4$ e a circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ por meio da homotetia de centro O e razão 3.

29.2 Seja P um ponto da circunferência C. Prove que os pontos médios das cordas que partem de P formam uma circunferência C', tangente a C no ponto P e de raio metade. Generalize.

29.3 Seja Q um ponto no interior da circunferência C. Qual é o conjunto dos pontos médios dos segmentos que ligam Q aos pontos de C?

29.4 Prove que toda semelhança de razão $r \neq 1$ que preserva a orientação do plano e deixa invariante uma reta s (isto é, transforma cada ponto de s noutro ponto de s) é uma homotetia com centro num ponto da reta s. [Observe de que modo σ transforma um segmento perpendicular a s, partindo de um ponto de s.]

29.5 Sejam ABC e $A_1B_1C_1$ triângulos no plano Π, tais que $\mathrm{d}(A_1, B_1) = r \cdot \mathrm{d}(A, B)$, $\mathrm{d}(A_1, C_1) = r \cdot \mathrm{d}(A, C)$ e $\mathrm{d}(B_1, C_1) = r \cdot \mathrm{d}(B, C)$. Prove que existe uma semelhança (única) $\sigma \colon \Pi \to \Pi$ tal que $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$ e $\sigma(C) = C_1$.

29.6 Dados os segmentos de reta paralelos AB e A_1B_1, descreva explicitamente duas semelhanças que levem A em A_1 e B em B_1.

30.1 Sejam C e C' circunferências tangentes no ponto P. Uma reta passando por P corta C e C' nos pontos A e A' respectivamente. Prove que a tangente a C no ponto A é paralela à tangente a C' no ponto A'.

30.2 Ache a equação da reta transformada da reta $4x - y = 2$ pela homotetia de centro no ponto $O' = (1, 1)$ e razão -3.

31.1 Sejam $\sigma, \tau \colon \Pi \to \Pi$ semelhanças, ambas preservando ou ambas invertendo a orientação. Dados os números reais α, β, com $\alpha + \beta = 1$, considere a transformação $T \colon \Pi \to \Pi$, definida por $T(P) = \alpha \cdot \sigma(P) + \beta \cdot \tau(P)$. Prove que T é uma semelhança ou uma transformação constante.

31.2 Use o Teorema da seção 31 para provar que se σ é uma semelhança e T é uma translação então $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma$ é uma translação.

31.3 Conhecidas as equações de uma semelhança relativamente a um sistema de eixos ortogonais, determinar as equações da semelhança inversa no mesmo sistema.

31.4 Conhecidas as equações de duas semelhanças σ, τ num sistema de eixos ortogonais, determinar as equações da semelhança composta $\sigma \circ \tau$ no mesmo sistema, supondo que $\sigma(O) = \tau(O) = O$.

31.5 Sejam $ABCD \ldots L$ e $A_1B_1C_1D_1 \ldots L_1$ polígonos semelhantes, igualmente orientados, com A_1 correspondendo a A, B_1 a B etc.

Sejam A_0 o ponto médio do segmento AA_1, B_0 o ponto médio do segmento BB_1, etc. Prove que o polígono $A_0B_0C_0D_0 \ldots L_0$ é semelhante a $ABCD \ldots L$ ou reduz-se a um único ponto.

31.6 Com a notação do exercício anterior, sejam fixados os números reais α, β com $\alpha + \beta = 1$. Ponha $A_0 = \alpha A + \beta A_1$, $B_0 = \alpha B + \beta B_1, \ldots, L_0 = \alpha L + \beta L_1$. Prove que o polígono $A_0B_0C_0D_0 \ldots L_0$ é semelhante a $ABCD \ldots L$ ou reduz-se a um só ponto.

31.7 Dadas duas circunferências C e C_1, de centros O e O_1 respectivamente, fixe um ponto A em C e um ponto A_1 em C_1. Fixe também um número $t \in [0,1]$. Para cada ponto P da circunferência C, seja P_1 o ponto da circunferência C_1 tal que o ângulo de OA para OP seja igual ao ângulo de O_1A_1 para O_1P_1. E seja $P_0 = (1-t)P + tP_1$. Prove que os pontos P_0 constituem uma circunferência de centro no ponto $O_0 = (1-t)O + tO_1$ ou coincidem todos com O_0.

31.8 Identifique a imagem da curva $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0$ pela transformação $\sigma(x,y) = (u,v)$, onde $u = x + y$ e $v = x - y$.

32.1 Se a transformação afim F leva o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$, prove que F leva o baricentro de ABC no baricentro de $A_1B_1C_1$.

32.2 Sejam $F, G: \Pi \to \Pi$ transformações afins e α, β números reais, com $\alpha + \beta = 1$. Defina a transformação $T = \alpha F + \beta G$ pondo, para todo ponto P em Π, $T(P) = \alpha \cdot F(P) + \beta \cdot G(P)$. Prove que T é uma transformação afim.

32.3 Prove que, para quaisquer números a, b, c, d, p e q fixados, a transformação F que leva o ponto $P = (x,y)$ em $P_1 = (x_1, y_1)$, com $x_1 = ax + by + p$ e $y_1 = cx + dy + q$ é uma transformação afim.

32.4 Considere a transformação afim F, que leva o ponto $P = (x,y)$ em $P_1 = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = x + y$ e $y_1 = y$. Determine a inclinação a de modo que F transforme a reta $y = ax$ e sua perpendicular $y = -x/a$ num par de retas perpendiculares.

32.5 Prove que se $F, G: \Pi \to \Pi$ são transformações afins então a composta $G \circ F$ também é uma transformação afim. Prove também que se a transformação afim F é bijetiva então sua inversa $F^{-1}: \Pi \to \Pi$ também é afim.

32.6 Fixado um ponto O no plano Π, prove que toda transformação afim $F: \Pi \to \Pi$ se exprime como a composta $F = T \circ G$ de uma translação T com uma transformação afim G tal que $G(O) = O$. Dadas as equações de F, determine as de G e de T.

32.7 Dadas uma transformação afim G e uma translação T no plano Π, prove que existe uma translação T' tal que $G \circ T = T' \circ G$. Além disso, se G for sobrejetiva, existe uma translação T'' tal que $T \circ G = G \circ T''$.

32.8 Seja $F: \Pi \to \Pi$ a projeção sobre uma reta r, paralelamente à reta r'. Prove que $F \circ F = F$.

32.9 Seja $F: \Pi \to \Pi$ uma transformação afim tal que $F = F \circ F$. Mostre que o conjunto X dos pontos P do plano tais que $F(P) = P$ tem a seguinte propriedade: uma combinação afim de dois pontos quaisquer de X ainda pertence a X.

32.10 Combine o Exercício 20.11 com o exercício anterior para concluir que uma transformação afim $F: \Pi \to \Pi$ tal que $F \circ F = F$ ou é constante, ou é a aplicação identidade ou é a projeção sobre uma reta r, paralelamente a outra reta r'. Aqui, r é o conjunto dos pontos P do plano tais que $F(P) = P$ é r' é a reta que liga algum ponto Q fora de r à sua imagem $F(Q)$.

32.11 Seja $F: \Pi \to \Pi$ uma transformação afim do plano Π que leva a circunferência C numa circunferência C_1.

(a) Considere em C dois diâmetros perpendiculares d e d' e uma corda c, paralela a d. As imagens c_1, d_1 e d'_1 desses segmentos são tais que d'_1 corta c_1 e d_1 ao meio, logo é um diâmetro de C_1, perpendicular a c_1 e d_1. Como d_1 também corta d'_1 ao meio, conclua que F transforma dois diâmetros perpendiculares quaisquer de C em diâmetros perpendiculares de C_1.

(b) No plano Π, introduza dois sistemas de eixos ortogonais OXY e $O_1X_1Y_1$, onde O é o centro de C, O_1 é o centro de C_1 e O_1X_1, O_1Y_1 são os transformados de OX e OY, respectivamente, por F. Mostre que F transforma um ponto de coordenadas (x, y) no primeiro sistema num ponto de coordenadas (rx, ry) no segundo sistema, onde r é a razão do raio de C_1 para o raio de C.

(c) Conclua que F é uma semelhança.

33.1 Considerando duas projeções convenientes, mostre que a composta de duas transformações afins de posto um pode ter posto zero ou um.

33.2 A composta de duas transformações afins de posto dois tem posto dois.

33.3 Dê exemplo de uma transformação afim de posto um que não seja uma projeção.

33.4 Demonstre a afirmação feita no texto de que uma transformação afim de posto dois leva retas paralelas em retas paralelas.

33.5 Sejam $F, Id: \Pi \to \Pi$ respectivamente a projeção sobre a reta r, paralelamente à reta r' e a transformação identidade. Como $2+(-1) = 1$, a combinação afim $T = 2F - Id$ é uma transformação afim. (Exerc. 32.2.) Prove que se tem $T \circ T = Id$. Mostre que T é a reflexão oblíqua em torno de r, paralelamente a r'.

33.6 Seja $T: \Pi \to \Pi$ uma transformação afim tal que $T \circ T = Id$. Mostre que a combinação afim $F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}Id$ cumpre $F \circ F = F$, logo (segundo o Exercício 32.10) F é uma transformação constante, ou é a transformação identidade ou é a projeção sobre uma reta r, paralelamente a outra reta r'. Prove que, no primeiro caso, T é a simetria (rotação de 180°) em torno de algum ponto; no segundo caso, $T = Id$ e, no terceiro caso, T é a reflexão em torno da reta r, paralelamente à reta r'.

34.1 Num dado sistema de eixos ortogonais, sejam $A = (1,1)$, $B = (1,2)$ e $C = (0,0)$. Escreva as equações da transformação afim do plano que leva o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$, onde $A_1 = (2,0)$, $B_1 = (2,2)$ e $C_1 = (0,3)$.

34.2 Ache as equações da transformação afim do plano que leva o retângulo $ABCD$, com $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (3,1)$ e $D = (3,0)$ no paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$, onde $A_1 = (0,0)$, $B_1 = (-3,1)$, $C_1 = (-1,4)$ e $D_1 = (2,3)$.

37.1 Na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, prove que os pontos médios das cordas paralelas a uma reta dada r constituem um *diâmetro* d', isto é, uma corda que passa pelo centro. [Isto é óbvio quando $a = b$, ou seja, numa circunferência. Faça o caso geral recair no particular por meio da transformação afim $T(x,y) = (ax, bx)$.]

37.2 No exercício anterior, se a reta r tem inclinação $\lambda \neq 0$, prove que o diâmetro d' tem inclinação λ', onde $\lambda\lambda' = -b^2/a^2$.

37.3 No contexto dos dois exercícios anteriores, prove que, reciprocamente, se d é o diâmetro da elipse paralelo à reta r então d passa pelo ponto médio de todas as cordas paralelas a d'. (Os diâmetros d e d' dizem-se *conjugados* quando cada um deles passa pelo meio das cordas paralelas ao outro.)

37.4 Considerando o ponto médio de uma corda paralela ao diâmetro d de uma elipse, obtenha um método gráfico de determinar o diâmetro conjugado de d.

37.5 Uma reta diz-se *tangente* a uma elipse quando tem apenas um ponto em comum com essa elipse. Dado um ponto A da elipse E, seja AA' o diâmetro que passa por A. Prove que a tangente à elipse, traçada pelo ponto A, é paralela ao diâmetro conjugado de AA'. Descreva um método gráfico para traçar a tangente a uma elipse por um dos pontos dessa elipse.

37.6 Um *raio* da elipse E é um segmento de reta que liga o centro de E a um ponto A dessa elipse. Dois raios dizem-se *conjugados* quando estão contidos em diâmetros conjugados de E. Prove que a área do paralelogramo construído sobre dois raios conjugados quaisquer da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é igual a ab.

37.7 Sejam AA' e BB' diâmetros conjugados da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Prove que as tangentes pelas extremidades desses diâmetros formam um paralelogramo cuja área é $4ab$.

37.8 Prove que a soma dos quadrados dos comprimentos de dois raios conjugados na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é sempre igual a $a^2 + b^2$.

37.9 Seja AA' um diâmetro da elipse E. Prove que, entre todos os triângulos inscritos em E tendo A como um dos vértices, o de maior área tem a base BC paralela ao diâmetro conjugado a AA'. Prove também que BC corta AA' no ponto P tal que $d(A,P)/d(A',P) = 2$ e que a área desse triângulo independe da escolha do vértice A. [Use o fato de que o triângulo de maior área inscrito numa circunferência é equilátero e considere uma transformação afim levando um círculo em E.]

37.10 Prove que todos os triângulos inscritos numa elipse e tendo como baricentro o centro da elipse têm a mesma área, a qual é a maior área de um triângulo inscrito nessa elipse. [Mesmo método do exercício anterior.]

37.11 Se a equação de uma elipse é $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, determine a maior área de um triângulo nela inscrito.

37.12 Os quadriláteros de maior área inscritos numa elipse são os paralelogramos cujas diagonais são um par de diâmetros conjugados. Segue-se que as áreas desses paralelogramos são todas iguais. Sendo $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ a equação da elipse, calcule a área desses paralelogramos. [Use o fato de que o quadrado é o quadrilátero de maior área inscrito numa circunferência.]

37.13 Prove que uma elipse com mais de dois eixos de simetria é uma circunferência.

37.14 Sejam ABC e $A_1B_1C_1$ triângulos nos planos Π e Π_1 respectivamente. Prove que esses planos podem ser dispostos de tal modo que uma projeção paralela de Π sobre Π_1 transforma ABC num triângulo semelhante a $A_1B_1C_1$.

37.15 As tangentes a uma elipse traçadas pelos pontos A e B da mesma se encontram no ponto P. Seja Q o ponto médio do segmento AB. Prove que a reta PQ passa pelo centro da elipse.

38.1 Seja $F: \Pi \to \Pi$ uma bijeção do plano Π que leva pontos não-colineares em pontos não-colineares. Prove que F é uma transformação afim. [Observe que se F não fosse afim, sua inversa F^{-1} também não seria.]

38.2 Sejam Π e Π_1 dois planos não paralelos. Dado um ponto O acima de Π e de Π_1, defina a transformação $F: \Pi \to \Pi_1$ que associa a cada ponto P do plano Π o ponto P_1, interseção da reta OP com o plano Π_1. É claro que F leva pontos colineares de Π em pontos colineares de Π_1, logo devia ser uma transformação afim. Por outro lado, se A, B, C são pontos colineares em Π, com $A \in \Pi \cap \Pi_1$ então, considerando $A = F(A)$, $B_1 = F(B)$ e $C_1 = F(C)$, não se tem $d(A,B)/d(A_1,B_1) = d(BC)/d(B_1,C_1)$ porque o segmento BB_1 não é paralelo à base CC_1 do triângulo ACC_1. Como resolver este paradoxo?

Quarta Parte

Soluções dos Problemas

Soluções dos Exercícios da Primeira Parte

2.1 Fixe uma origem na reta orientada, tornando-a um eixo. Sejam a, b e c respectivamente as abcissas dos pontos A, B e C. Segue-se de $d(A, B) = |b - a|$ que $\rho(A, B) = b - a$. Logo $\rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, A) = (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$.

2.2 Seja c a abcissa de C, ponto médio do segmento AB. Deve-se ter $\rho(A, C) = \rho(C, B)$, isto é, $c - a = b - c$. Logo $c = (a + b)/2$. Analogamente, se $a_1, a_2, \ldots, a_n - 1$ são as abcissas dos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n - 1$, que dividem o segmento AB em n-partes iguais então, para cada i, de 1 até $n - 1$, devemos ter $\rho(A, A_i) = (i/n) \cdot \rho(A, B)$, ou seja, $a_1 - a = i(b - a)/n$, logo $a_i = a + i(b - a)/n$.

2.3 Devemos ter $(x - a)/(b - x) = (b - a)/(x - a)$. Segue-se que $x^2 + (b - 3a)x + a^2 + ab - b^2 = 0$. As raízes desta equação são $x = [3a - b \pm (b - a)\sqrt{5}]/2$. A escolha do sinal menos daria $x < (3a - b)/2 < (3a - a)/2 = a$. Como se pede $a < x < b$, deve ser $x = [3a - b + (b - a)\sqrt{5}]/2$. O caso particular $a = 0$ e $b = 1$ conduz a $x = (\sqrt{5} - 1)/2$, o conhecido "número de ouro".

2.4 A afirmação $x = (1 - t)a + tb$ equivale a $t = (x - a)/(b - a)$. Daí resulta que $t < 0$ quando $x < a$, que $t > 1$ quando $x > b$, que $0 \leq t \leq 1$ quando $a \leq x \leq b$ e que, nesse último caso, se tem $t = d(A, X)/d(A, B)$.

2.5 A igualdade $d(X, s(X)) = 2 \cdot d(X, A)$ significa que a distância entre os extremos de um segmento é igual ao dobro da distância de um desses extremos ao ponto médio. Se x é a abcissa de X então $d(X, t(X)) = |x - (x + a)| = |a|$.

2.6 Seja $A = f(A)$ ponto fixo de f. Para todo $X \neq A$ tem-se

$d(X, A) = d(f(X), f(A)) = d(f(X), A)$, logo X e $f(X)$ distam igualmente de A. Portanto $f(X) = X$ ou $f(X) = s(X)$ = simétrico de X em relação a A. Neste último caso, A é o ponto médio do segmento de extremos $X, f(X)$. Se, para algum $X_0 \neq A$, ocorre que $f(X_0) = X_0$ então, como f não é a função identidade, podemos achar X tal que $f(X) \neq X$ e, pelo que acabamos de ver, A e X_0 serão ambos o ponto médio do segmento de extremos $X, f(X)$, o que é um absurdo. Segue-se que A é o único ponto fixo de f, donde $f(X) = s(X)$ para todo X. Em seguida, suponhamos que a isometria f não tenha ponto fixo. Por conveniência, substituiremos os pontos de E por suas abcissas, que são números reais, de modo que a isometria dada é agora uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $a = f(0)$. A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - a$, é uma isometria, com $g(0) = f(0) - a = a - a = 0$. Pela primeira parte do exercício, ou g é a função identidade ou é a simetria em torno de 0. Esta última possibilidade significaria que $g(x) = x$, ou seja, $f(x) - a = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto iria implicar $f(a/2) - a = -a/2$, donde $f(a/2) = a/2$, uma contradição pois f não tem ponto fixo. Concluímos que g é a função identidade, isto é, $f(x) - a = x$, donde $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma translação.

2.7 Sejam $s(x) = 2a - x$, $s'(x) = 2a' - x$, $t(x) = x + b$ e $t'(x) = x + b'$ as equações das simetrias s, s' e das translações t, t' em termos das abcissas dos pontos do eixo. Então $(s \circ s')(x) = s(s'(x)) = s(2a' - x) = 2a - (2a' - x) = x + 2(a - a')$ e também $(t \circ t')(x) = t(t'(x)) = t(x + b') = x + (b + b')$. Por outro lado, $(s \circ t)(x) = s(t(x)) = s(x + b) = 2a - (x + b) = 2(a - b/2) - x$ enquanto $(t \circ s)(x) = t(s(x)) = t(2a - x) = 2a - x + b = 2(a + b/2) - x$. Portanto $s \circ s'$ e $t \circ t'$ são translações mas $s \circ t$ e $t \circ s$ são simetrias. Note ainda que $t \circ t' = t' \circ t$, $s \circ s' = (s' \circ s)^{-1}$ e $t \circ s$ é diferente de $s \circ t$ e nada mais.

3.1 O simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação à reta horizontal $y = b$ é o ponto $A' = (x, 2b - y)$ e o simétrico de A em relação à reta vertical $x = a$ é ponto $A'' = (2a - x, y)$.

3.2 Os pontos $(\sqrt[3]{1/4}, \sqrt[3]{3/4}), (-\sqrt[3]{1/4}, \sqrt[3]{5/4}), (\sqrt[3]{5/4}, -\sqrt[3]{1/4})$ per-

tencem ao primeiro, segundo e quarto quadrantes respectivamente e cumprem a condição $x^3 + y^3 = 1$. Por outro lado, se $P = (x, y)$ é um ponto do terceiro quadrante então x e y são ambos negativos, o mesmo acontecendo com x^3 e y^3, logo não se pode ter $x^3 + y^3 = 1$.

3.3 Se o ponto $P = (x, y)$ cumpre a condição $x^4 + y^4 = 1$ então $P' = (x, -y)$ e $P'' = (-x, y)$ também cumprem. Isto mostra que o conjunto dado é simétrico em relação aos eixos coordenados. Além disso se $P = (x, y)$ pertence, também $P''' = (-x, -y)$ pertence ao conjunto. Como o ponto $(\sqrt[4]{1/2}, \sqrt[4]{1/2})$, do primeiro quadrante, está no conjunto dado, segue-se que esse conjunto possui pontos nos quatro quadrantes. Finalmente, de $x^4+y^4 = 1$ conclui-se que $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$. Logo o conjunto dado é limitado. (Note que o conjunto do exercício 3.2 não é limitado).

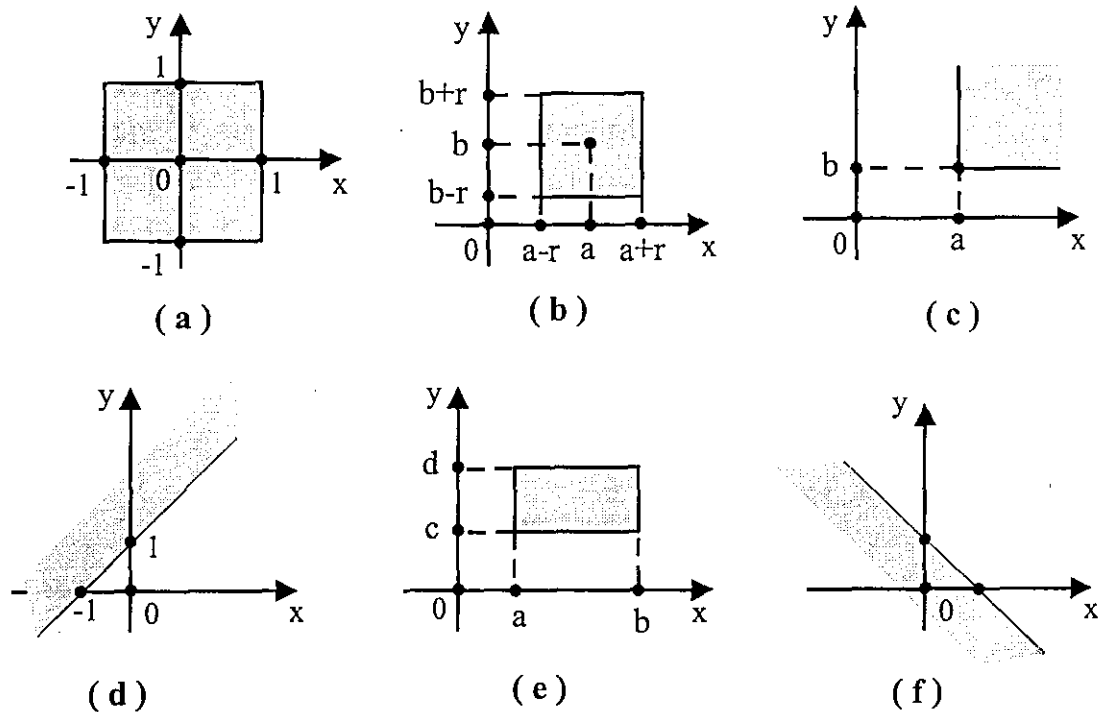



Figura 3.4

3.4 (a) Região limitada pelo quadrado de centro na origem e lados de comprimento 2, paralelos aos eixos. (b) Idem com centro no ponto $P = (a, b)$ e lados de comprimento $2r$. (c) Região convexa cuja fron-

teira é o ângulo reto com vértice no ponto $P = (a, b)$ e os lados são semi-retas paralelas aos eixos, dirigidas respectivamente para a direita e para cima. (d) Semi-plano formado pelos pontos situados acima da reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-1, 0)$. (e) Retângulo de lados paralelos aos eixos e vértices nos pontos $(a, c), (a, d), (b, c)$ e (b, d). (f) Semi-plano formado pelos pontos situados abaixo da reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

3.5 X é o disco de centro na origem e raio $1; Y$ é formado pelos pontos dentro de uma parábola voltada para baixo, cujo eixo é a reta $x = 0$ e cujo vértice é o ponto $(0, 1)$; W é uma hipérbole e Z é um quadrado cujos vértices estão sobre os eixos, à distância 1 da origem. Se $P = (x, y)$ pertence a Z, isto é, se $|x| + |y| = 1$, então, elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^2 + y^2 + 2|x||y| = 1$, donde $x^2 + y^2 \leq 1$, logo P pertence ao conjunto X. Assim, $Z \subset X$. W não possui pontos no segundo nem no quarto quadrantes porque o produto da abcissa pela ordenada de um ponto qualquer desses quadrantes é um número negativo, portanto diferente de 2. Finalmente, a interseção de Y com o eixo das abcissas é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^2 + y \leq 1$ e $y = 0$. Logo $x^2 \leq 1$, ou seja, $-1 \leq x \leq 1$. Assim, essa interseção é formada pelos pontos $(x, 0)$, com $x \in [-1, 1]$.

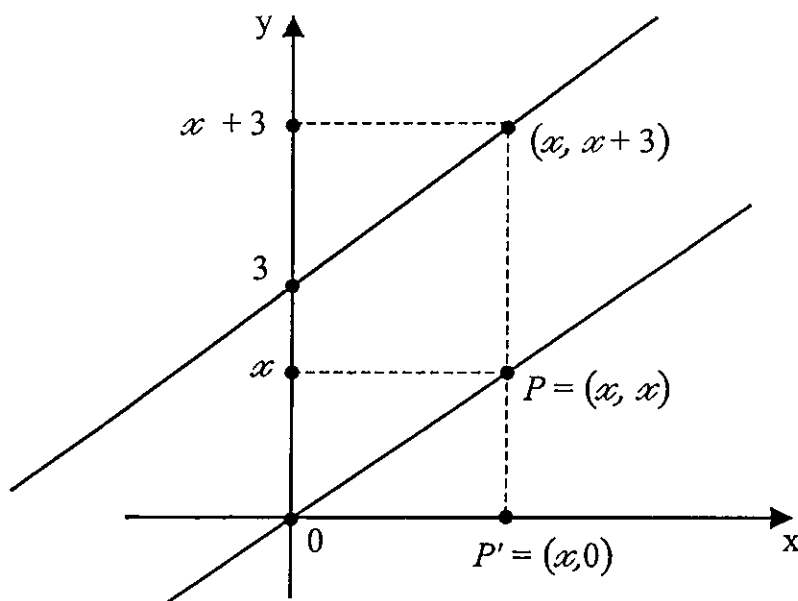



Figura 3.6

3.6 Os catetos do triângulo retângulo cujos vértices são a origem O, o ponto $P = (x, x)$ e o ponto $P' = (x, 0)$ têm ambos medida igual a $|x|$, logo trata-se de um triângulo retângulo isósceles: seus ângulos agudos medem 45^0 e, conseqüentemente, o segmento OP faz ângulos iguais com os eixos. Assim os pontos $P = (x, x)$ formam a bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, chamada a *diagonal* do plano. A reta paralela a essa diagonal, traçada pelo ponto $(0, 3)$, é formada pelos pontos de coordenadas $(x, x + 3)$ porque o segmento vertical baixado de um qualquer desses pontos sobre a diagonal tem comprimento 3 (os lados opostos de um paralelogramo são iguais).

3.7 Para todo $x \neq 0$, o ponto $Q = (-x, x)$ está no segundo quadrante (se $x > 0$) ou no quarto (se $x < 0$). Se $Q' = (0, x)$, o triângulo retângulo OQQ' é isósceles, logo o segmento OQ forma ângulos de 45^0 com os eixos. Assim, esses pontos Q formam a bissetriz do segundo e do quarto quadrantes.

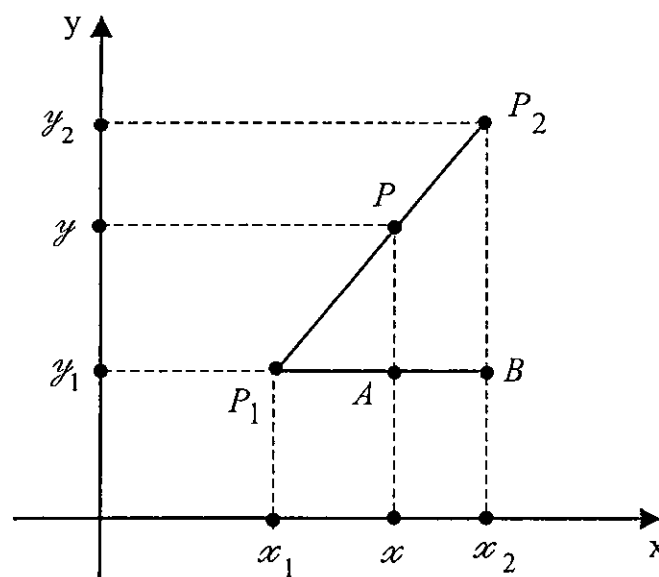



Figura 3.8

3.8 Para fixar idéias, suponhamos que $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$. A igualdade $x = (1 - t)x_1 + tx_2$ significa $t = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$. Se $P = (x, y)$ pertence ao segmento P_1P_2 então x pertence ao intervalo $[x_1, x_2]$, logo $0 \leq t \leq 1$. Considerando os pontos $A = (x, y_1)$ e $B = (x_2, y_1)$, vemos

que os triângulos retângulos APP_1 e BP_2P_1 são semelhantes, logo $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(x - x_1)$, donde $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$, mostrando que $y = (1-t)y_1 + ty_2$. Reciprocamente, se x e y têm essas expressões, com o mesmo $t \in [0, 1]$, então o ponto do segmento P_1P_2 que tem abcissa x terá, como acabamos de ver, ordenada y, logo esse ponto é P, ou seja, P pertence ao segmento PP_1.

3.9 Afirmar que $x^2 - 5x + 6 = 0$ equivale a dizer que $x = 2$ ou $x = 3$. Assim, um ponto $P = (x, y)$ cumpre a condição $x^2 - 5x + 6 = 0$ se, e somente se, P está numa das retas verticais $x = 2$ ou $x = 3$. Noutras palavras, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^2 - 5x + 6 = 0$ é a reunião dessas duas retas verticais. Analogamente, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $y^2 - 6y + 9 = 0$ é a reta horizontal $y = 3$ porque 3 é a única raiz desta equação do segundo grau. Finalmente, nenhum número real cumpre a condição $3x^2 + 4x + 6 = 0$ logo o conjunto definido pela equação (c) é vazio.

3.10 Considere o triângulo cujos vértices são $0 = (0, 0)$, $A = (x, y)$ e $B = (x + u, y + v)$. O comprimento do lado OA é $\sqrt{x^2 + y^2}$, do lado AB é $\sqrt{u^2 + v^2}$ e do lado OB é $\sqrt{(x + u)^2 + (y + v)^2}$. A desigualdade proposta significa que o lado OB é menor do que a soma dos outros dois. Para uma prova puramente aritmética observe que os termos da desigualdade alegada são todos não-negativos, logo ela equivale à desigualdade obtida elevando-se ambos os membros ao quadrado, que é $(x + u)^2 + (y + v)^2 \leq x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2}$. Simplificando, deve-se provar que $xu + yv \leq \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2}$. Esta desigualdade, conhecida como de Cauchy-Schwarz, será provada na seção 22. Uma demonstração independente é a seguinte: sem perda de generalidade, podemos supor que x, y, u, v são não-negativos pois $xu + yv \leq |x||u| + |y||v|$ e $|x|^2 = x^2$, $|y|^2 = y^2$, etc. Então basta mostrar que $(xy + yv)^2 \leq (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$. Efetuando as multiplicações e simplificando, devemos provar que $2xyuv \leq x^2v^2 + y^2u^2$, ou seja, que $x^2v^2 - 2xvyu + y^2u^2 \geq 0$, o que é evidente porque o primeiro membro desta última igualdade é igual a $(xv - yu)^2$.

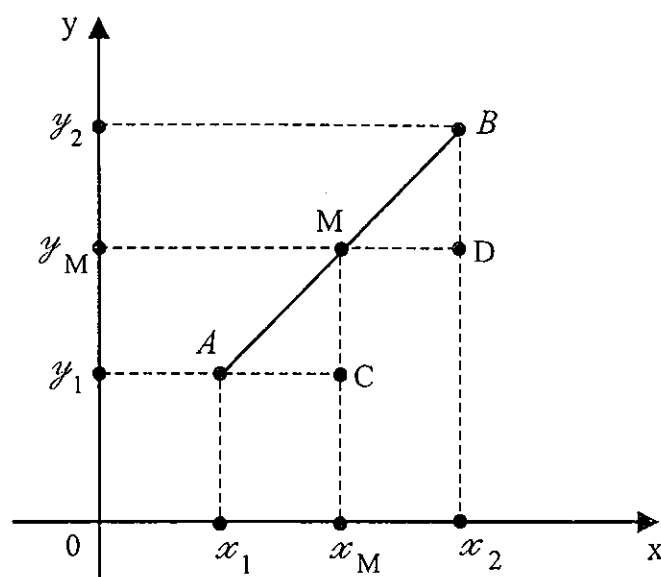



Figura 3.11

3.11 Seja $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento AB. Considerando os pontos $C = (x_M, y_1)$ e $D = (x_2, y_M)$, vemos que os triângulos retângulos ACM e MDB são congruentes porque têm as hipotenusas AM e MB iguais e os ângulos agudos respectivamente iguais logo $AC = MD$, ou seja, x_M é o ponto médio do segmento $[x_1, x_2]$. Então $x_M = (x_1 + x_2)/2$. Analogamente se vê que $y_M = (y_1 + y_2)/2$. Um raciocínio do mesmo tipo, com n triângulos, mostra que as coordenadas dos pontos M_i que dividem o segmento AB em n partes iguais são $x_{M_i} = x_1 + i(x_2 - x_1)/n$ e $y_{M_i} = y_1 + i(y_2 - y_1)/n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. (Vide exerc. 2.2.)

3.12 Sejam $O = (a, b)$ e $A = (x, y)$. Para calcular as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$, simétrico de A em relação a O, notamos que, sendo O o ponto médio do segmento AA', tem-se $a = (x + x')/2$ e $b = (y + y')/2$. Segue-se daí que $x' = 2a - x$ e $y' = 2b - y$.

4.1 O ponto pedido é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta diagonal $y = x$. Para obter suas coordenadas, consideramos os pontos $A = (a, a)$ e $B = (b, b)$. O triângulo PAB é isósceles, pois $d(P, A) = d(P, B) = |b - a|$. Seja $M = ((a + b)/2, (a + b)/2)$ o ponto médio do segmento AB. A mediana AM é também altura do triângulo

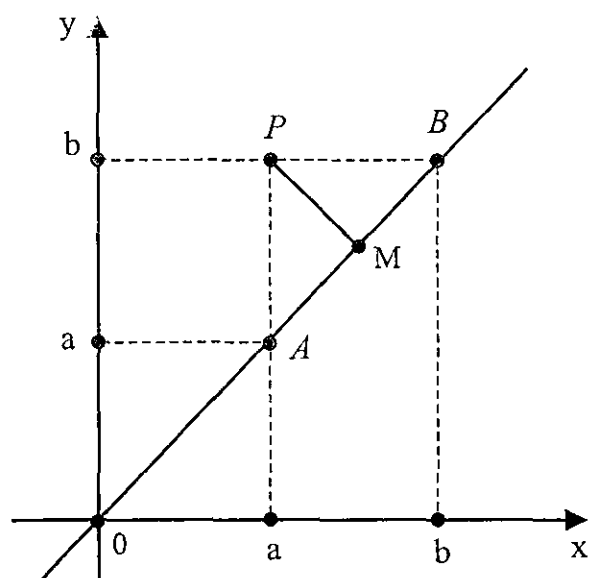



Figura 4.1

PAB. Logo, $M = ((a+b)/2, (a+b)/2)$ é o ponto procurado.

4.2 Tome um sistema de coordenadas no qual a origem é o ponto médio do segmento PQ e o eixo das abcissas é a reta PQ. Neste sistema, tem-se $P = (-a, 0)$ e $Q = (a, 0)$, onde $d(P, Q) = 2a > 0$. Um ponto $R = (x, y)$ é eqüidistante de P e Q se, e somente se, $d(P, R)^2 = d(Q, R)^2$, ou seja, $(x+a)^2 = (x-a)^2$. Desenvolvendo e simplificando, isto nos dá $2ax = -2ax$. Como $a > 0$, concluímos que $x = 0$. Assim, um ponto R é eqüidistante de P e Q se, e somente se, pertence ao eixo das ordenadas, o qual é precisamente a perpendicular pelo ponto médio do segmento PQ.

4.3 É claro que $PQRS$ é um retângulo, pois seus lados são paralelos aos eixos. Além disso, seus lados têm todos comprimentos igual a $|y-x|$, logo é um quadrado. Como as diagonais do quadrado são perpendiculares e se cortam mutuamente ao meio, vemos que $R = (y, x)$ é o simétrico de $P = (x, y)$ em relação à reta QS, que vem a ser a diagonal do plano.

4.4 Sejam $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$. Então $P^* = (-y, x)$ e $Q^* = (-v, u)$ logo

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

e

$$d(P^*, Q^*) = \sqrt{(-y+v)^2 + (x-u)^2}.$$

Vê-se que $d(P^*, Q^*) = d(P, Q)$.

4.5 Completando os quadrados, podemos escrever a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ como $(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = (a^2 + b^2 - 4c)/4$. Se for $a^2 + b^2 - 4c > 0$, esta equação pode ser escrita como $(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = r^2$, como $r = (\sqrt{a^2 + b^2 - 4c})/2$, logo representa a circunferência de raio r, com centro no ponto $P = (-a/2, -b/2)$.

4.6 Quando $a^2 + b^2 = 4c$, a equação dada equivale a $(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = 0$, que só é satisfeita pelo ponto $P = (-a/2, -b/2)$. Por outro lado, quando $a^2 + b^2 < 4c$, a equação dada representa o conjunto vazio (isto é, nenhum ponto (x, y) a satisfaz) porque a soma de dois quadrados de números reais não pode ser um número negativo.

4.7 Como $d(A, B) = 2a$, devemos ter também $d(P, A) = 2a$, ou seja, $\sqrt{a^2 + y^2} = 2a$, donde $a^2 + y^2 = 4a^2$, $y^2 = 3a^2$ e daí $y = \pm a\sqrt{3}$. Os pontos $P = (0, a\sqrt{3})$ e $P' = (0, -a\sqrt{3})$ são as duas respostas possíveis à questão proposta.

4.8 São as circunferências com centro num ponto $(\lambda, 0)$ do eixo horizontal e raio $|\lambda|$. A equação de uma dessas circunferências é portanto $(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$ ou $x^2 + y^2 = 2\lambda x$.

4.9 Resulta do exercício anterior que (a) é a equação da circunferência de raio $1/2$ e centro no ponto $(1/2, 0)$. Pode-se também usar o exercício 4.5 ou, diretamente, completar o quadrado para chegar à mesma conclusão. Analogamente concluiremos que (b) representa a circunferência de raio $1/2$ com centro no ponto $(0, -1/2)$, que (c) é a equação da circunferência de raio $\sqrt{2}/2$, com centro no ponto $(-1/2, -1/2)$ e que (d) representa o conjunto vazio, ou seja, nenhum par (x, y) de números reais satisfaz aquela equação.

4.10 Sejam $M = (a/2, c/2)$ e $N = (b/2, c/2)$ os pontos médios dos lados AC e BC respectivamente. A igualdade das medianas AN e BM significa que $d(A, N)^2 = d(B, M)^2$, ou seja, que $a^2 - ab + (b^2 + c^2)/4 = b^2 - ab + (a^2 + c^2)/4$. Simplificando, vem $a^2 = b^2$. Como $A \neq B$, deve-se ter $a = -b$. Isto mostra que o eixo vertical, além da altura, é também mediana relativa à base AB, o que já permite concluir que o triângulo ABC, com duas medianas iguais, é isósceles. Pode-se também verificar este fato diretamente, computando os comprimentos dos lados AC e BC, e obtendo $d(A, C)^2 = a^2 + c^2 = d(B, C)^2$.

4.11 Como $P = (x, y)$ está na circunferência, temos $x^2 + y^2 = r^2$. Logo $d(A, P)^2 + d(B, P)^2 = (x + r)^2 + y^2 + (x - r)^2 + y^2 = x^2 + 2rx + r^2 + y^2 + x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 2r^2 = 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 = (2r)^2 = d(A, B)^2$. Segue-se da recíproca do Teorema de Pitágoras que $\widehat{APB}$ é um ângulo reto.

4.12 Temos $d(P, A)^2 = (x + 1)^2 + y^2$ e $d(P, B) = (x - 1)^2 + y^2$. A condição $d(P, A)^2/d(P, B)^2 = 4$ escreve-se então como $(x + 1)^2 + y^2 = 4[(x - 1)^2 + y^2]$, o que dá $x^2 + y^2 - (10/3)x + 1 = 0$. Pelo exercício 4.5, conclui-se que os pontos $P = (x, y)$ que cumprem a condição dada formam a circunferência de centro no ponto $(5/3, 0)$ e raio $\sqrt{91}/3$. Para generalizar, deve-se descrever o conjunto dos pontos P tais que $d(P, A)/d(P, B) = r$, onde A e B são dois pontos fixados no plano e r é uma constante positiva. Se $r = 1$, sabemos que o conjunto em questão é a mediatriz do segmento AB. Por isso, podemos supor $r \neq 1$. Escrevendo $k = r^2$ e tomando um sistema de eixos coordenados onde $A = (a, 0)$ e $B = (-a, 0)$, devemos ter $(x - a)^2 + y^2 = k[(x + a)^2 + y^2]$. Desenvolvendo e simplificando, vem: $x^2 + y^2 + [(k+1)/(k-1)]2ax + a^2 = 0$. Pelo exercício 4.5, essa equação define uma circunferência se, e somente se, tivermos $[2a(k + 1)/(k - 1)]^2 > 4a^2$, ou seja, $(k + 1)/(k - 1) > 1$, o que é sempre verdade. Portanto, para $r \neq 1$, os pontos P tais que $d(P, A)/d(P, B) = r$ constituem uma circunferência.

4.13 O leitor deve esboçar as curvas para ter uma idéia aproximada da localização dos pontos pedidos. O valor preciso das coordenadas desses pontos se obtêm resolvendo os sistemas de equações. O primeiro,

$x^2 + y^2 = 2$ e $xy = 1$, se resolve multiplicando a segunda equação por 2 e subtraindo da primeira, o que dá $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, ou seja, $(x - y)^2 = 0$, logo $x = y$. Substituindo na segunda equação, vem $x^2 = 1$, donde $x = \pm 1$. Os pontos procurados são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. O segundo sistema, $x^2 = 4y$ e $x + y = 3$ se resolve substituindo y por $3 - x$ na primeira equação, o que dá $x^2 + 4x - 12 = 0$, logo $x = 2$ ou $x = -6$. Os pontos procurados são portanto $(2, 1)$ e $(-6, 9)$.

4.14 As igualdades $d(P,Q)^2 = d(P,O)^2 = d(Q,O)^2$ se escrevem como $(x - w)^2 + (y - z)^2 = x^2 + y^2 = w^2 + z^2$, ou seja, $x^2 + y^2 + w^2 + z^2 - 2(xw + yz) = x^2 + y^2 = w^2 + z^2$ logo $w^2 + z^2 - 2(xw + yz) = 0$ e $x^2 + y^2 - 2(xw + yz) = 0$, o que prova a afirmação alegada.

4.15 O polinômio dado, evidentemente, pode escrever-se como $(y - x)^2 - 5(y - x) + 6 = w^2 - 5w + 6$, onde $w = y - x$. Ele é igual a zero se, e somente se $w = 2$ ou $w = 3$, isto é, $y = x + 2$ ou $y = x + 3$, pois 2 e 3 são raízes da equação $w^2 - 5w + 6 = 0$. Como $y = x + 2$ e $y = x + 3$ são equações de duas retas paralelas à diagonal (v. exercício 3.6), concluímos que os pontos sobre estas duas retas são os que satisfazem à equação $x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 5y + 6 = 0$.

4.16 Usando o método do exercício anterior, temos sucessivamente: $x^2+y^2+2xy+6x+6y+9 = 0$, $(x+y)^2+6(x+y)+9 = 0$, $w^2+6w+9 = 0$ (como $w = x + y$), $w = -3, x + y = -3$, $y = -x - 3$. Logo a equação dada representa a reta $y = -x - 3$, paralela à bissetriz do 2º e 4º quadrantes (vide Exercícios 3.7 e 3.6).

4.17 A equação procurada tem a forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, onde $P = (a, b)$ é o centro e r é o raio da circunferência. Para obter os três números a, b e r, impõe-se a condição de que os três pontos dados pertençam à circunferência, logo $(-1-a)^2+b^2 = r^2$, $a^2+(1-b)^2 = r^2$ e $(1 - a)^2 + b^2 = r^2$. Subtraindo a terceira equação da primeira obtemos $4a = 0$, donde $a = 0$. Substituindo a por zero nas duas últimas equações, vem $b^2 - 2b + 1 = r^2$ e $1 + b^2 = r^2$, donde $b^2 - 2b + 1 = 1 + b^2$, logo $b = 0$. Assim, o centro da circunferência é a origem $(0, 0)$ e seu raio é $r = 1$. A equação procurada é, portanto $x^2 + y^2 = 1$. A segunda

parte do exercício conduz ao sistema das três equações $a^2 + b^2 = r^2$, $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = r^2$ e $a^2 - 4a + 4b^2 - 2b + 1 = r^2$, nas incógnitas a, b e r. Substituindo o valor de r da primeira equação nas outras duas, resulta o sistema linear $a + b = 1, 2a + b = 5/2$, que fornece $a = 3/2$, $b = -1/2$. Entrando com estes valores em $a^2+b^2 = r^2$ resulta $r = \sqrt{10}/2$. A equação que se busca é $(x-3/2)^2+(y+1/2)^2 = 5/2$. (Poderíamos observar, de saída, que $a = 3/2$ porque o centro da circunferência pertence à mediatriz do segmento que une os pontos $(1,1)$ e $(2,1)$ e essa mediatriz é a reta $x = 3/2$.)

5.1 Temos $y = ax^2 + bx + c$ e queremos provar que também vale $y = a(-x - b/a)^2 + b(-x - b/a) + c$. É só desenvolver e simplificar. Além disso, como os pontos (x, y) e $(-x - b/a, y)$ estão na mesma horizontal e a média aritmética das suas abcissas é $-b/2a$, segue-se que eles são simétricos em relação à reta vertical $x = -b/2a$.

5.2 Escreva $ax^2+bx+c = a[x^2+(b/a)x+c/a]$ e complete o quadrado no trinômio dentro do colchete para obter imediatamente $ax^2+bx+c = a[(x + b/2a)^2 + (4ac - b^2)/4a^2]$. A primeira parcela da soma dentro destes colchetes nunca é negativa, logo o menor valor da soma é obtido quando tal parcela é zero, o que se dá para $x = -b/2a$. Se $a > 0$ este valor de x torna mínimo o trinômio $ax^2 + bx + c$. Se $a < 0$, multiplicar por a inverte o sentido das desigualdades logo $x = -b/2a$ torna $ax^2 + bx + c$ máximo.

5.3 Se um ponto P tinha coordenadas (x, y) no sistema OXY, suas coordenadas no novo sistema $O'X'Y'$ são (x', y'), onde $x' = b/2a$, $y' = y + (b^2 - 4ac)/4a$. Tirando os valores de x' e y' nestas duas igualdades e substituindo-os na equação $y = ax^2 + bx + c$ obtemos

$$y' + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x' - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x' - \frac{b}{2a}\right) + c.$$

Simplificando, resulta $y' = ax'^2$.

5.4 O produto $(x^2 + y^2)(xy - 1)$ só é zero quando $x^2 + y^2 = 0$ ou quando $xy - 1 = 0$. Noutras palavras o produto se anula quando

$x = y = 0$ ou quando $xy = 1$. Esta última condição significa que $x \neq 0, y \neq 0$ e $y = 1/x$. Logo G é o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida do seguinte modo: $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/x$ quando $x \neq 0$.

5.5 A interseção é o ponto da reta onde $y = 0$. Ora, $ax+b = o$ significa $x = -b/a$. Logo o ponto procurado é $(-b/a, 0)$. Evidentemente, isto só faz sentido quando $a \neq 0$. Se for $a = 0$ então a reta em questão é a horizontal $y = b$, que é paralela ao eixo das abcissas se $b \neq 0$ e coincide com ele se $b = 0$.

6.2 A equação dessa reta é $y = y_0 + a(x - x_0)$. Igualando a zero: $y_0 + a(x - x_0) = 0$ dá $x = x_0 - y_0/a$. (Se $a = 0$ a reta é horizontal.) A interseção com o eixo vertical dá-se quando $x = 0$, logo $y = y_0 - ax_0$ é ordenada desse ponto.

6.3 Como $a \neq 1$ e $a' \neq 1$, as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ não são paralelas à diagonal $y = x$. Os pontos de encontro dessas retas com a diagonal têm abcissas que cumprem $ax + b = x$, donde $x = b/(1 - a)$, e $a'x' + b = x'$, donde $x' = b'(1 - a')$. Para que esses pontos coincidam, a condição a impor é $b/(1 - a) = b'/(1 - a')$.

6.4 Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são $M_{BC} = (b/2, c/2)$, $M_{AC} = (a/2, c/2)$ e $M_{AB} = ((a + b)/2, 0)$. A equação da mediana AM_{BC} tem a forma $y = mx + n$. Para determinar os coeficientes m e n impõe-se que as coordenadas de A e M_{BC} satisfaçam à equação. Tem-se $0 = ma + n, c/2 = mb/2 + n$. Resolvendo o sistema, vem $m = c/(b - 2a)$ e $n = ax/(2a - b)$. Logo, a equação da mediana AM_{BC} é $y = cx/(b - 2a) + ac/(2a - b)$. De modo análogo, se vê que as equações das medianas BM_{AC} e CM_{AB} são respectivamente $y = cx/(a - 2b) + bc/(2b - a)$ e $y = -2cx/(a + b) + c$. Resolvendo o sistema linear formado pelas equações das duas primeiras medianas obtemos $x = (a + b)/3$, $y = c/3$, que são as coordenadas do ponto G; interseção de AM_{BC} com BM_{AB}. Uma substituição direta mostra que G pertence à mediana CM_{AB}. Portanto as 3 medianas têm o ponto G em comum. Finalmente, temos $d(A, G) = \frac{1}{3}\sqrt{(2a - b)^2 + c^2}$ e $d(G, M_{BC}) = \frac{1}{6}\sqrt{(2a - b)^2 + c^2}$. Cálculo análogo pode ser feito em

relação às outras duas medianas. **Observação:** As equações das 3 medianas foram obtidas admitindo-se que $a \neq 2b$, $b \neq 2a$ e $a + b \neq 0$. Isto significa que nenhuma dessas 3 medianas é vertical. Se uma delas for vertical, sua equação terá a forma $x = a$, $x = b$ ou $x = 0$, o que tornará bem mais fácil achar sua interseção com as outras duas medianas.

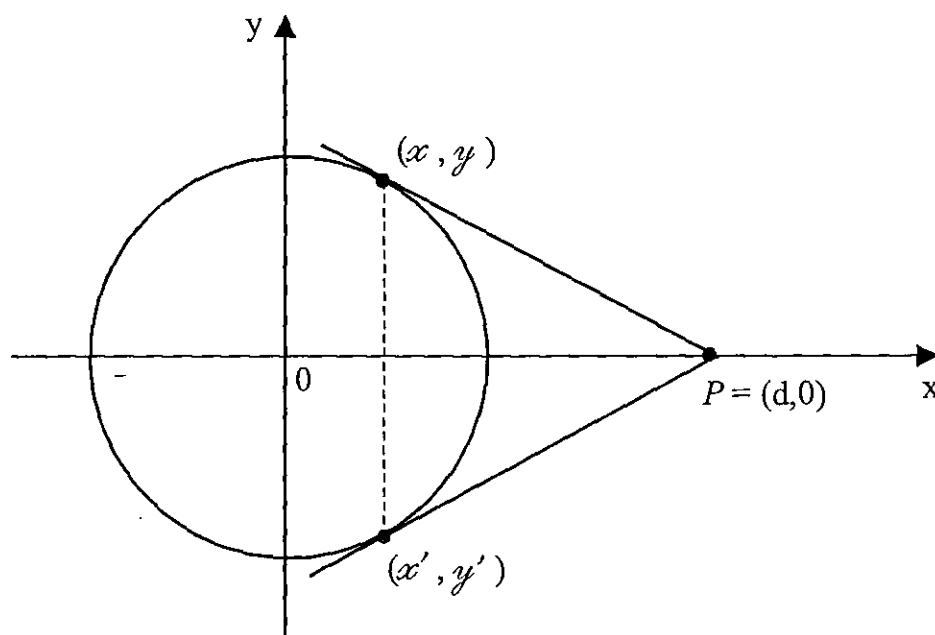



Figura 6.5

6.5 Como a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de contacto, o Teorema de Pitágoras dá: $d^2 = r^2 + (x - d)^2 + y^2$ para uma tangente e $d^2 = r^2 + (x' - d) + y'^2$ para a outra. Como $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = r^2$, uma simplificação imediata fornece $d \cdot x = r^2$ e $d \cdot x' = r^2$, logo $x = x' = r^2/d$. Entretanto com este valor de x na equação $x^2 + y^2 = r^2$ obtém-se $y = \pm(r/d)\sqrt{d^2 - r^2}$. Assim, os dois pontos de contacto da tangente têm a mesma abcissa e ordenadas simétricas $y' = -y$. Para escrever as equações das tangentes, é melhor chamar os pontos de contacto de (x_0, y_0) e $(x_0, -y_0)$. As equações são $y = \pm[y_0 + (d - x_0)(x - x_0)/y_0]$.

6.6 Parte-se do fato de que a equação $x^3 - x - a = 0$ escreve-se também

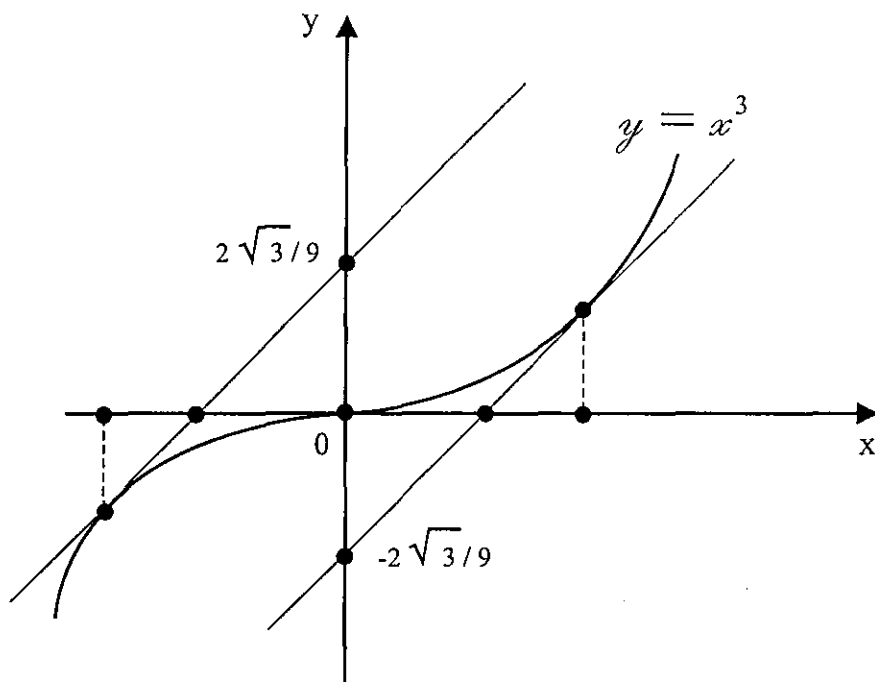



Figura 6.6

como $x^3 = x + a$. Logo, as raízes desta equação são as abcissas x dos pontos em que a reta $y = x + a$ corta o gráfico da curva $y = x^3$. Para diferentes valores de a, as retas $y = x + a$ são paralelas à diagonal $y = x$, sendo a a ordenada do ponto em que cada reta corta o eixo vertical. Examinando o gráfico da função $f(x) = x^3$, vemos que há dois valores $a_1 < a_2$ para os quais a reta $y = x + a$ é tangente à curva $y = x^3$. Quando $a < a_1$ ou $a > a_2$, a reta $y = x + a$ tem apenas um ponto em comum com a curva $y = x^3$. Quando $a = a_1$ ou $a = a_2$ a reta $y = x + a$ tem 2 pontos em comum com a curva $y = x^3$. E quando $a_1 < a < a_2$, a reta $y = x + a$ tem 3 pontos em comum com a curva $y = x^3$. Segue-se que a equação $x^3 - x - a = 0$ tem uma raiz real quando $a < a_1$ ou $a > a_2$, tem 2 raízes reais quando $a = a_1$ ou $a = a_2$ e tem 3 raízes reais se $a_1 < a < a_2$. Para determinar os números a_1 e a_2, valores de a para os quais a reta $y = x + a$ é tangente à curva $y = x^3$, observa-se que, nos pontos de tangência, a inclinação $3x^2$ da tangente é igual à inclinação da reta $y = x + a$, ou seja, $3x^2 = 1$, donde $x = \pm\sqrt{3}/3$. Nestes pontos, a reta $y = x + a$ toca a curva $y = x^2$, donde $x^3 = x + a$, ou seja, $a = x^3 - x$. Assim, temos $a_1 = (\sqrt{3}/3)^3 - \sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}/9$ e $a_2 = (-\sqrt{3}/3)^3 + \sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}/9$.

6.7 Para evitar confusão, consideremos o gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto (a, a^3). A tangente neste ponto tem equação da forma $y = 3a^2x + n$, (Vide exercício anterior.) Para determinar n, impomos a condição de que essa tangente contenha o ponto (a, a^3), ou seja: $a^3 = 3a^2a + n$, logo $n = -2a^3$. Portanto, a tangente à curva $y = x^3$ no ponto (a, a^3) é a reta da equação $y = 3a^2x - 2a^3$. Esta reta corta o eixo horizontal no ponto cuja abcissa x cumpre $3a^2x - 2a^3 = 0$, logo $x = 2a/3$.

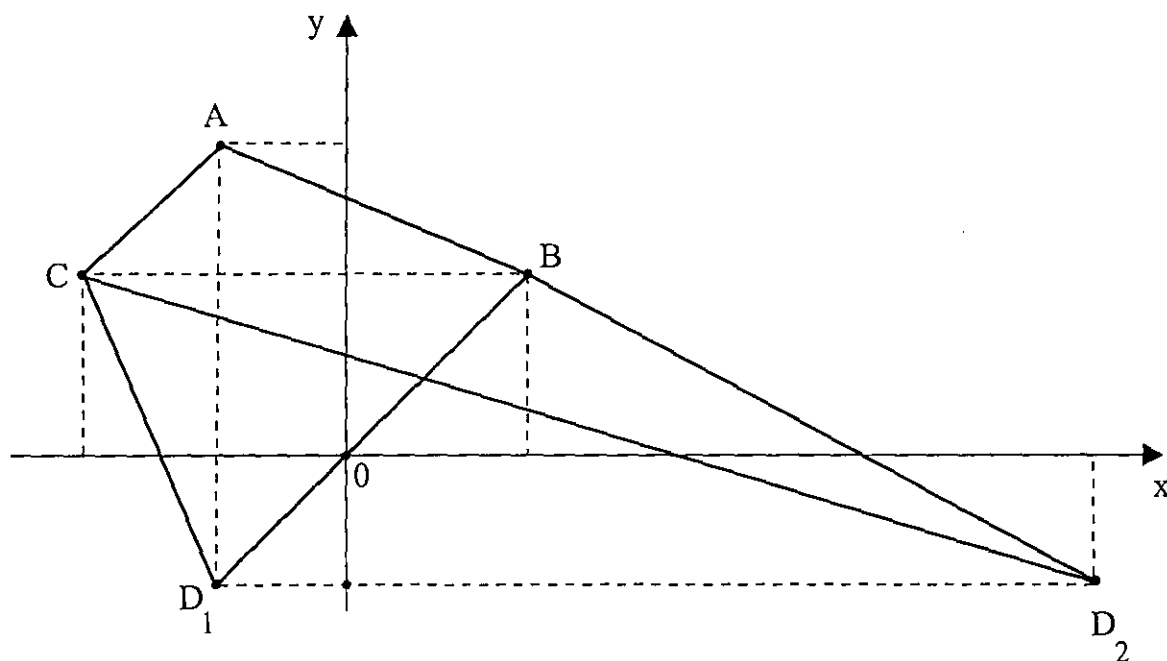



Figura 7.1

7.1 Podemos determinar x de modo que o lado BD seja paralelo a AC ou então fazer CD paralelo a AB. Ora, a inclinação da reta AC é $(2-3)/(-2-(-1)) = 1$ e a inclinação de BD é $(2-x)/3$. Assim, BD é paralelo a AC se, e somente se, $2 - x = 3$, ou seja, $x = -1$. Analogamente, CD é paralelo a AB se, e somente se, $x = 7$. Em ambos os casos, $ABCD$ é um trapézio.

7.2 Se a reta r não é vertical, sua equação é $y = ax + b$, isto é, (x, y) pertence a r se, e somente se, $y = ax + b$. Então $(x + p, y + q) = (x + p, ax + b + q) = (x + p, a(x + p) + b')$, onde $b' = b + q - ap$. Assim, quando (x, y) percorre a reta r, os pontos $(x + p, y + q)$ descrevem a

reta s, cuja equação é $y = ax + b'$, com $b' = b + q - ap$. Logo s é paralela a r.

7.3 O ponto (x, y) pertence à faixa F quando $ax + b \leq y \leq ax + b'$, isto é, quando $b \leq y - ax \leq b'$.

7.4 Se a reta $y = cx + d$ corta transversalmente alguma das retas que constituem o bordo da faixa F então $y = cx + d$ contém pontos dentro e fora dessa faixa. Logo, a reta só pode estar contida na faixa quando coincide com uma das retas do bordo ou é paralela a ambas. Isto significa que $c = a$ e que, para todo x, tem-se $ax+b \leq ax+d \leq ax+b'$, logo $b \leq d \leq b'$.

7.5 Se uma das retas for vertical, tem-se $y = ax + b$ (equação de r) e $x = k$ (equação de s). Neste caso, o ponto $(x, y) = (k, ak + b)$ pertence à reta r e o ponto $(x, y') = (k, ak + b - 2c)$ pertence à reta s, com $y - y' = 2c > c$. Se as retas r e s são ambas não-verticais, sejam $y = ax+b$ e $y' = a'x+b'$ suas equações, onde (digamos) $a > a'$. Então, para todo $x > (c + b' - b)/(a - a')$ tem-se $y - y' = (a - a')x + b - b' > c + b' - b + b - b'$, isto é, $y - y' > c$. (Como $c > 0$, isto implica $|y - y'| > c$.)

8.1 A paralela à reta $y = ax$ tirada pelo ponto (b, b) tem equação $y = b + a(x - b) = ax + b - ab$. Esta reta corta o eixo das abcissas quando $y = 0$, o que nos dá $x = (a - 1)b/a$. O ponto procurado é $((a - 1)b/a, 0)$ se $a \neq 0$. Quando $a = 0$ a reta $y = ax$ é o eixo das abcissas e sua paralela a partir de (b, b), ou coincide com esse eixo (se $b = 0$) ou não o corta jamais.

8.2 A reta BC tem inclinação 1, logo a reta paralela a BC traçada pelo ponto $A = (1, 2)$ tem equação $y = 2 + 1 \cdot (x - 1)$, ou seja $y = x + 1$.

8.3 A reta $y = -x$ tem inclinação -1. A equação da paralela pelo ponto $(3, 3)$ é $y = 3 - (x - 3)$, isto é, $y = -x + 6$.

8.4 A inclinação da reta BC é -1, logo a equação da paralela a BC pelo ponto $D = (3/2, 9/2)$ é $y = 9/2 - (x - 3/2)$, isto é $y = -x + 6$. A

equação da reta AB (que tem inclinação 1 e passa pelo ponto $(1,3)$) é $y = x + 2$. A interseção das retas $y = -x + 6$ e $y = x + 2$ obtém-se igualando $-x + 6 = x + 2$, logo $x = 2$ e $y = -2 + 6 = 4$. Assim, $E = (2,4)$.

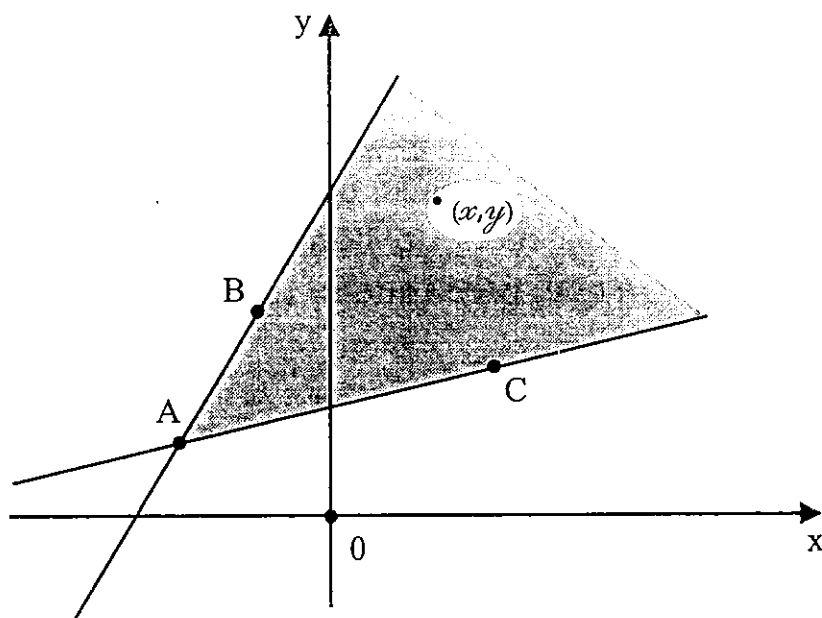



Figura 9.1

9.1 As equações das retas AB e AC são respectivamente $y = 2x + 5$ e $y = x/5 + 7/5$, $x \in \mathbb{R}$. Os pontos das semi-retas AB e AC, origem A, devem ainda cumprir a condição $x \leq -2$ (abcissa de A). O ponto $P(x,y)$ está no interior no ângulo $\widehat{BAC}$ quando $x > -2$ e $x/5 + 7/5 < y < 2x + 5$. Observe-se porém que se y satisfaz a última desigualdade então $x/4 + 7/5 < 2x + 5$ e daí $x > -2$. Portanto, para que $P = (x,y)$ esteja no interior do ângulo $\widehat{BAC}$, basta exigir que $x/5 + 7/5 < y < 2x + 5$.

9.2 Com os dados do exercício anterior, a equação da reta BC é $y = -x/4 + 11/4$. O quadrilátero $ABPC$ é convexo se, e somente se, além da condição $x/5 + 7/5 < y < 2x + 5$, tem-se também $y > -x/4 + 11/4$.

9.3 A equação da reta AB é $y = 6 + [(9-6)/(8-5)](x-5)$, ou seja, $y = x + 1$. Ela corta o eixo das abcissas quando $y = 0$. Então $x + 1 = 0$, donde $x = -1$. O ponto procurado é $P = (-1,0)$.

9.4 As equações das retas OA, OB e AB são respectivamente $y = 8x/7$, $y = 16x/15$ e $y = x + 1$. Um ponto $P = (x, y)$ está no interior do triângulo OAB se, e somente se, está no interior do ângulo $A\hat{O}B$ e no mesmo lado da reta AB que o ponto O. A primeira destas condições exige que $15x/16 < y < 8x/7$, o que é verdadeiro quando $x = 9/2$ e $y = 5$, pois $135/32 < 5 < 72/14$. Como $0 < 0 + 1$ e $5 < 9/2 + 1$, vemos que $0 = (0, 0)$ e $C = (9/2, 5)$ estão do mesmo lado da reta AB. Portanto $C = (9/2, 5)$ está no interior do triângulo OAB. [**Observação:** dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) estão no mesmo lado da reta $y = ax + b$ quando se tem $y_1 < ax_1 + b$ e $y_2 < ax_2 + b$ ou então se tem $y_1 > ax_1 + b$ e $y_2 > ax_2 + b$]. Finalmente, o ponto $D = (10, 11)$ está sobre a reta AB pois satisfaz a equação $y = x + 1$.

9.5 A inclinação de AB é $(5-3)/(2-1) = 2$ enquanto que a inclinação de CD é $(4-4)/(6-3) = 0$, logo AB forma um ângulo maior do que CD com o eixo horizontal.

9.6 As igualdades $x_{43} \cdot x_{32} \cdot y_{21} = x_{43} \cdot y_{32} \cdot x_{21} = y_{43} \cdot x_{32} \cdot x_{21}$, tendo em vista que x_{43}, x_{32} e x_{21} são diferentes de zero, equivalem a $y_{21}/x_{21} = y_{32}/x_{32} = y_{43}/x_{43}$, ou seja, a afirmar que os segmentos AB, BC e CD têm a mesma inclinação, logo AB e CD estão sobre a mesma reta BC.

9.7 A igualdade $x_{43} \cdot y_{21} = y_{43} \cdot x_{21}$ equivale a $y_{21}/x_{21} = y_{43}/x_{23}$, logo significa que os segmentos AB e CD têm a mesma inclinação. Por outro lado, a afirmação $y_{32} \cdot x_{21} \neq x_{32} \cdot y_{21}$ significa que as inclinações dos segmentos AB e BC são diferentes, logo AB e CD não estão sobre a mesma reta, sendo apenas paralelos.

9.8 A reta que une os pontos (x_0, ax_0^2) e $(0, -ax_0^2)$ tem equação $y = -ax_0^2 + 2ax_0 \cdot x$. Para achar as interseções desta reta com a parábola $y = ax_2$, deve-se resolver a equação $ax^2 = -ax_0^2 + 2ax_0 \cdot x$, ou seja, $ax^2 - 2ax_0 \cdot x + ax_0^2 = 0$. Como o discriminante desta equação é zero, ela possui uma única raiz, igual a x_0. Portanto, a reta considerada (que não é paralela ao eixo porque não é vertical) corta a parábola num único ponto, ou seja, é tangente.

10.1 A inclinação do segmento AB é $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, logo a inclinação de qualquer reta perpendicular a AB é $(x_1 - x_2)/(y_2 - y_1)$. A condição de passar pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ completa a determinação da equação da reta que é $y = y_0 + (x_1 - x_2)(x - x_0)/(y_2 - y_1)$. Se $y_2 - y_1 = 0$ então AB é horizontal, a perpendicular é vertical e sua equação é $x = x_0$.

10.2 A condição de que a reta $y = ax$ seja perpendicular ao segmento PP' se exprime como $(x - x')/(y' - y) = a$, ou seja, $x' + ay' = x + ay(1)$. A condição de que o ponto médio $((x + x')/2, (y + y')/2)$ do segmento PP' pertença à reta $y = ax$ se exprime como $y + y' = ax + ax'$, ou seja, $ax' - y' = y - ax(2)$. Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) em relação às incógnitas x' e y' encontramos

$$x' = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}x + \frac{2a}{1 + a^2}y, \quad y' = \frac{2a}{1 + a^2}x - \frac{1 - a^2}{1 + a^2}y.$$

Estas equações reaparecerão na página 152 do texto.

10.3 Os eixos são escolhidos de modo que a origem seja o centro da circunferência e a semi-circunferência esteja no semi-plano superior. Então $A = (-r, 0)$ e $B = (r, 0)$. Para todo ponto $P = (a, b)$ da semi-circunferência, a inclinação do segmento AP é $b/(r + a)$ e a inclinação de PB é $-b/(r - a)$. Como $a^2 + b^2 = r^2$, o produto destas duas inclinações é igual a -1, logo $AP \perp PB$.

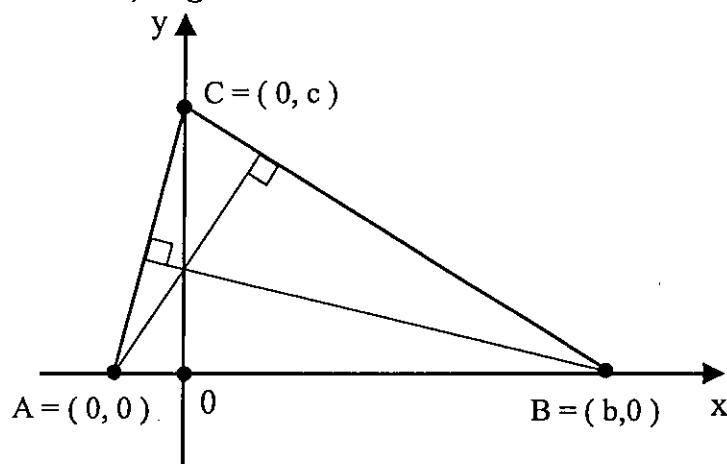



Figura 10.4

10.4 As inclinações dos lados AC e BC são respectivamente $-c/a$ e $-c/b$. A equação da reta que passa por A e é perpendicular a BC é portanto $y = b(x-a)/c$, enquanto a perpendicular a AC passando por B tem a equação $y = a(x-b)/c$. O ponto de encontro dessas duas alturas é dado por $a(x-b)/c = b(x-a)/c$, donde $x = 0$ (lembrar que $a \neq b$) e daí $y = -ab/c$. Como este ponto $(0, -ab/c)$ também pertence à altura que parte de C, segue-se que nele se encontram as 3 alturas do triângulo ABC.

10.5 As equações das retas BC, AC e AB são, respectivamente $y = 5+3(x-3)/4, y = -2(x-2)/3$ e $y = 5(x-2)$. Segue-se que as equações das alturas que partem dos vértices A, B e C são, respectivamente: $y = -4(x-2)/3, y = 5+3(x-3)/2$ e $y = 2-(x+1)/5$. Portanto, as coordenadas do pé H_A da altura que parte do vértice A são obtidas resolvendo o sistema $y = -4(x-2)/3$, $y = 5+3(x-3)/4$ o que fornece $H_A = (-1/25, 68/25)$. O comprimento da altura que parte do vértice A é, portanto a distância $d(A, H_A) = \sqrt{(2+1/25)^2 + (68/25)^2}$, que dá aproximadamente o valor $3,4$. Usando o mesmo método, vê-se que as alturas que partem dos vértices B e C medem respectivamente $4,7$ e $3,3$.

10.6 Se $A = (a, b), B = (-a, -b)$ e $P = (x, y)$ são vértices de um triângulo equilátero então a mediana PO é perpendicular à base AB, logo $y = -ax/b$. A igualdade $d(A,P)^2 = d(A,B)^2$ significa que $(x-a)^2+(y-b)^2 = 4(a^2+b^2)$. Desenvolvendo, simplificando e substituindo y por $-ax/b$, segue-se que $x^2 = 3b^2$, donde $x = \pm b\sqrt{3}$ e $y = \mp a\sqrt{3}$. Portanto o ponto P pode ser $(b\sqrt{3}, -a\sqrt{3})$ ou $(-b\sqrt{3}, a\sqrt{3})$.

10.7 Os pontos A' e B' foram obtidos subtraindo das abcissas de A e B o mesmo número $u = (a+c)/2$ e das ordenadas de A e B o mesmo número $v = (b+d)/2$. (Em particular, $A'B'$ é paralelo a AB, tem o mesmo comprimento e a mesma orientação). Como as coordenadas de A' e B' diferem apenas pelo sinal, segue-se do exercício anterior que, pondo $P' = ((b-d)\sqrt{3}/2, (c-a)\sqrt{3}/2)$ ou então $P' = ((d-b)\sqrt{3}/2, (a-c)\sqrt{3}/2)$, o triângulo $A'P'B'$ é equilátero. Somando-se $u = (a+c)/2$ às abcissas e $v = (b+d)/2$ às ordenadas dos vértices deste

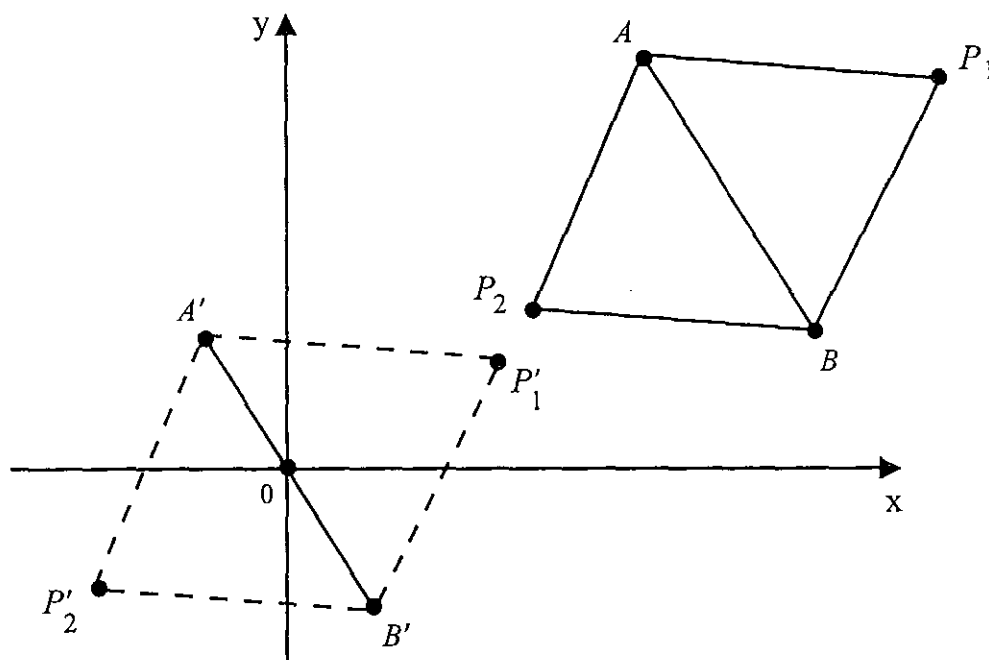



Figura 10.7

triângulo, obtemos o triângulo equilátero APB, onde A e B são os pontos originais e $P = ((b-d)\sqrt{3}/2+(a+c)/2, (c-a)\sqrt{3}/2+(b+d)/2)$. A outra solução é obtida trocando-se os sinais das coordenadas de P' e procedendo do mesmo modo.

11.1 Não. Se um ponto pertencesse a duas linhas de diferentes níveis da função f então essa função admitiria dois valores distintos nesse ponto.

11.2 Uma tal função pode ser definida pondo $f(x, y) = y - x^2$.

11.3 Escrever $x^2+2xy+y^2 = c$ é o mesmo que $(x+y)^2 = c$. Se $c > 0$, isto equivale a $x + y = \pm\sqrt{c}$, isto é, $y = \sqrt{c} - x$ ou $y = -\sqrt{c} - x$. Portanto, para cada $c > 0$, a linha de nível c da função $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ é um par de retas paralelas, a saber $y = \sqrt{c} - x$ e $y = -\sqrt{c} - x$. A linha de nível 0 da função f é a reta $y = -x$. Não há linhas de níveis negativos para f. (Ou seja, para cada $c < 0$, a linha de nível $f(x, y) = c$ é o conjunto vazio.)

11.4 A linha de nível zero da função f é o conjunto dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação $y^3 - x^3 + x^2y - xy^2x - y = 0$. Fatorando o primeiro membro, vê-se que esta equação equivale a $(y - x)(x^2 + y^2 - 1) = 0$. Concluímos então que $P = (x, y)$ pertence à linha de nível zero de f se, e somente se, $y = x$ ou $x^2 + y^2 = 1$. Logo a linha de nível procurada é formada pelo círculo de raio 1 e centro na origem, mais a reta diagonal $y = x$.

11.5 Como $x^3 - y^3 + 3xy^2 - 3x^2y = (x - y)^3$ e além disso, $(x - y)^3 = c$ equivale a $x - y = \sqrt[3]{c}$, concluímos que, para todo número real c, a linha de nível a da função f é a reta $y = x - \sqrt[3]{c}$, paralela à diagonal (igual à diagonal se $c = 0$).

11.6 Se considerarmos um novo sistema de eixos, mantendo o eixo das abcissas e deslocando o eixo vertical uma unidade para a direita, então um ponto de coordenadas (x, y) no sistema original passa a ter coordenadas (u, v) no novo sistema, como $u = x - 1$ e $v = y$. Então a equação $(x - 1)^2 + y = c$ passa a ser lida como $u^2 + v = c$, isto é, $v = c - u^2$, logo define uma parábola, com a abertura voltada para baixo e vértice no ponto $u = 0, v = c$. Portanto a linha de nível c da função $f(x, y) = (x - 1)^2 + y$ é para todo $c \in \mathbb{R}$, a parábola de abertura para baixo e vértice no ponto $(1, c)$.

11.7 A equação $x^2 - y^2 + 2x = -1$ equivale a $y^2 = x^2 + 2x + 1$, isto é, $y^2 = (x + 1)^2$, logo $y = \pm(x + 1)$. Assim, a linha de nível -1 da função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ é formada pelo par de retas perpendiculares $y = x + 1$, $y = -x - 1$, que se cortam no ponto $(-1, 0)$.

12.1 A reta em questão não passa pela origem, logo não é a linha de nível zero de uma função linear. Portanto, podemos escrever sua equação sob a forma $px + qy = 1$, com os coeficientes p e q a serem determinados. Como a reta passa pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$, tem-se $p \cdot a = 1$ e $q \cdot b = 1$, logo $p = 1/a$ e $q = 1/b$. Sua equação é $x/a + y/b = 1$.

12.2 Os pontos são $(c/a, 0)$ e $(0, c/b)$. Evidentemente, se $a = 0$ a reta é horizontal e, se $b = 0$, é vertical.

12.3 O polinômio $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 9x + 6y + 2$ escreve-se como $(3x-2y)^2 - 3(3x-2y)+2$, logo a equação dada equivale a $w^2 - 3w + 2 = 0$, com $w = 3x - 2y$. Ora, $w^2 - 3w + 2 = 0$ significa que $w = 1$ ou $w = 2$. Assim, os pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação dada constituem as duas retas paralelas $3x - 2y = 1$ e $3x - 2y = 2$.

12.4 Tem-se

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2y - 1 &= x^2 - (y^2 - 2y + 1) \\ &= x^2 - (y-1)^2 \\ &= (x + y - 1)(x - y + 1). \end{aligned}$$

Portanto, tem-se $x^2 - y^2 + 2y = 1$ se, e somente se, $x + y - 1 = 0$ ou $x - y + 1 = 0$, isto é, se, e somente se, o ponto (x, y) pertence a uma das retas $x + y = 1$ ou $x - y = 1$. O conjunto procurado é a união destas duas retas.

12.5 As equações dessas retas são $x/6 + y/3 = 1$ e $x/3 - y/6 = 1$. Como vale a condição $aa' + bb' = 0$ (pág. 43), vemos que elas são perpendiculares. O ângulo entre elas é reto.

12.6 Supõe-se que a, b e c sejam diferentes de zero. A equação $ax + by = c$ pode então escrever-se como $x/a' + y/b' = 1$, com $a' = c/a$ e $b' = c/b$. A reta que esta equação representa é (pelo exerc. 12.1) disjunta do primeiro quadrante se, e somente se, a' e b' são ambos negativos. Isto significa que a e b têm o mesmo sinal, oposto do sinal de c.

12.7 Para todo ponto (x, y) da tangente, o triângulo cujos vértices são os pontos de coordenadas $(a, b), (x_1, y_1)$ e (x, y) é retângulo e o cateto oposto a (x, y) tem comprimento r. Logo

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 \\ &= [(x-a)^2 - (x-x_1)^2] + [(y-b)^2 - (y-y_1)^2]. \end{aligned}$$

Usando duas vezes a identidade $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ e também o fato de que, em virtude de ser raio perpendicular à tangente, têm-se

$$(y_1 - b)/(x_1 - a) = -(x - x_1)/(y - y_1),$$

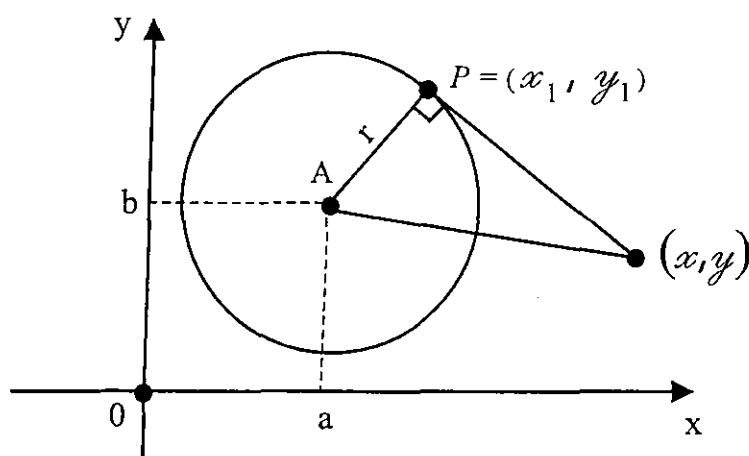



Figura 12.7

ou seja

$$(y - y_1)(y_1 - b) + (x - x_1)(x_1 - a) = 0,$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - a - x + x_1)(x - a + x - x_1) \\ &\quad + (y - b - y + y_1)(y - b + y - y_1) \\ &= (x_1 - a)(x - a) + (x_1 - a)(x - x_1) \\ &\quad + (y_1 - b)(y - b) + (y_1 - b)(y - y_1) \\ &= (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b). \end{aligned}$$

12.8 A equação da reta que passa pelos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ é $y = a_2 + (b_2 - a_2)(x - a_1)/(b_1 - a_1)$, ou seja, $(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y = a_2(b_1 - a_1) + b_2 - a_2$. Qualquer reta perpendicular a AB deve ter uma equação da forma $(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y = c$. Se esta perpendicular passa pelo ponto $((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2)$ então $2c = (b_1 - a_1)(a_1 + b_1) + (b_2 - a_2)(a_2 + b_2)$.

13.1 Dados os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do plano, o segmento da reta AB é o conjunto dos pontos da forma

$$((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + y_2),$$

onde $0 \leq t \leq 1$.

Se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ são soluções do sistema de desigualdades lineares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1 \\ \vdots \\ a_mx + b_my \le c_m \end{cases}$$

e $0 \le t \le 1$, então, para $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} & a_i[(1-t)x_1 + tx_2] + b_i[(1-t)y_1 + ty_2] \\ & = (1-t)[a_ix_1 + b_iy_1] + t[a_ix_2 + b_iy_2] \\ & \le (1-t)c_i + tc_i \\ & = c_i \end{aligned}$$

(A passagem com a desigualdade é justificada porque, se $0 \le t \le 1$, então $t \ge 0$ e $(1-t) \ge 0$.)

Logo, os pontos do segmento PQ são soluções do sistema, o que mostra que o conjunto de todas as suas soluções é convexo.

13.2 a)

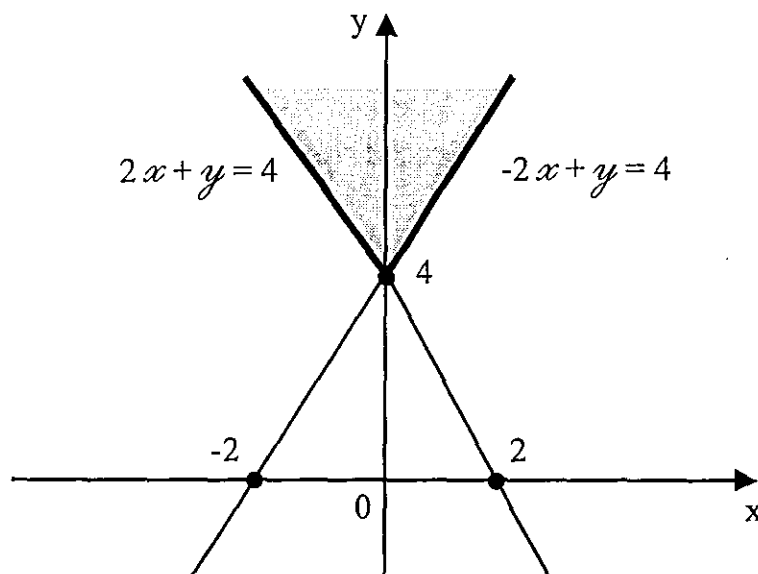



Figura 13.2a

(Para obter os semiplanos correspondentes às inequações, basta observar que a origem $(0, 0)$ não satisfaz nenhuma das duas inequações.)

b)

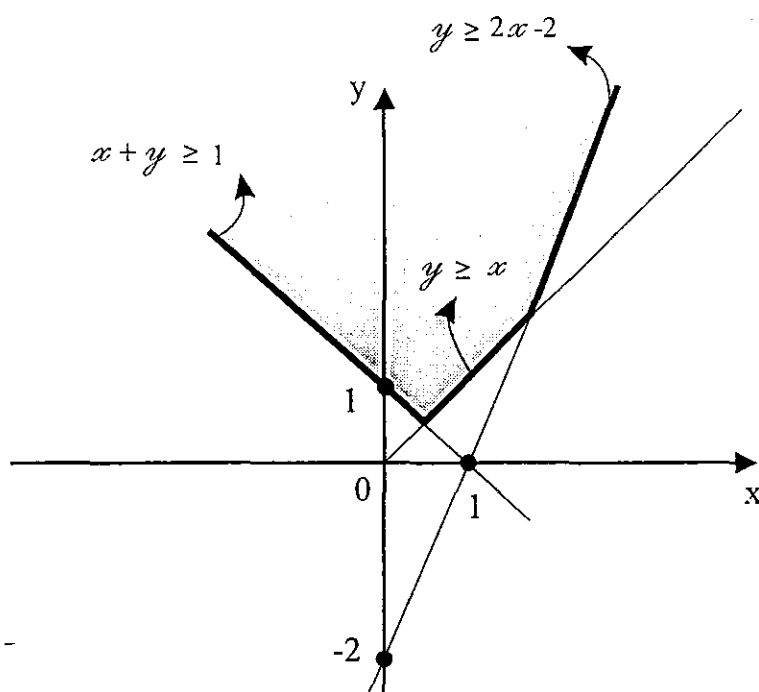



Figura 13.2b

13.3 O gráfico é obtido através de sua interseção com cada quadrante. No 1º quadrante, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Logo $|x| + |y| \leq 1$ é equivalente a $x \geq 0, y \geq 0$ e $x + y \leq 1$, o que resulta no gráfico da Figura 13.3a.

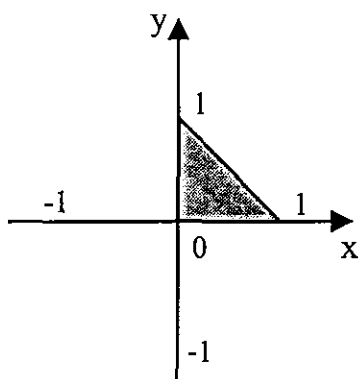



Figura 13.3a

O gráfico nos demais quadrantes pode ser obtido de modo análogo. No entanto, podemos também usar o fato de que o gráfico pedido é

simétrico em relação ao eixo x e ao eixo y (já que se um ponto (x, y) satisfaz $|x| + |y| \leq 1$, então $(x, -y)$ e $(-x, y)$ também satisfazem a inequação). Note que simetria em relação a ambos os eixos x e y implica em simetria em relação à origem. Logo o gráfico completo é o da Fig. 13.3b.

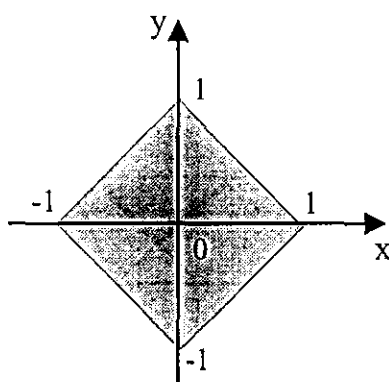



Figura 13.3b

13.4 O diagrama da figura 13.4 representa o conjunto de soluções das inequações e uma linha de nível da função objetivo.

O valor mínimo de $f(x, y) = x + 2y$ sobre o conjunto de soluções viáveis ocorre para $x = 1$ e $y = 0$, para um valor mínimo igual a 1.

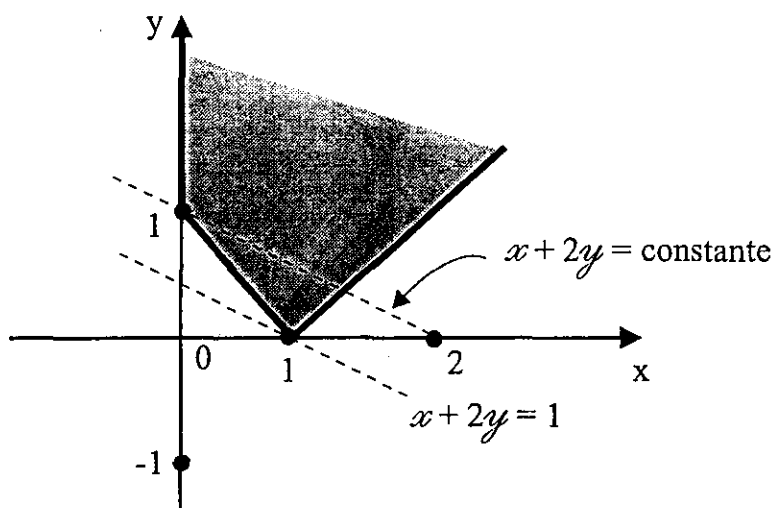



Figura 13.4

13.5 A figura 13.4 mostra que $x + 2y$ pode assumir valores arbitraria-

mente grandes, já que toda linha de nível ≥ 1 tem pontos comuns com o conjunto de soluções viáveis. Logo, o máximo não existe. (Dizemos, neste caso, que o programa linear é *ilimitado*.)

13.6 a) Sejam x e y o número de caixas de copos e de vinho, respectivamente, a serem produzidos por semana:

As restrições são:

$$x + \frac{1}{2}y \leq 50 \quad \text{(horas de uso da máquina)}$$
$$x + 2y \leq 80 \quad \text{(horas de trabalho manual)}$$

O objetivo é maximizar o lucro, que é dado por:

$$f(x, y) = 5000x + 4000y.$$

A figura 13.6 representa o conjunto de soluções das restrições e uma linha de nível da função objetivo.

De acordo com a figura, o valor máximo da função objetivo ocorre na linha de nível que contém o ponto de interseção das retas

$$x + \frac{1}{2}y = 50 \quad \text{e} \quad x + 2y = 80,$$

que é $(40, 20)$. Note que a inclinação de $5000x + 4000y =$ constante é $-\frac{5}{4}$, enquanto as inclinações de

$$x + \frac{1}{2}y = 50 \quad \text{e} \quad x + 2y = 80$$

são -2 e $-\frac{1}{2}$. Como $-2 < -\frac{5}{4} < -\frac{1}{2}$, concluímos que a posição relativa das retas que passam por $(40, 20)$ é a indicada na figura 13.6. Portanto, o lucro máximo é obtido com a produção de 40 caixas de copos comuns e 20 caixas de copos de vinho por semana.

b) A nova função objetivo é $f(x, y) = cx + 4000y$, onde c é o novo lucro por caixa de copos de vinho. A solução em (a) continua ótima se e só se a inclinação das linhas de nível de f continua a estar compreendida entre as inclinações das retas.

$$x + \frac{1}{2}y = 50 \quad \text{e} \quad x + 2y = 80.$$

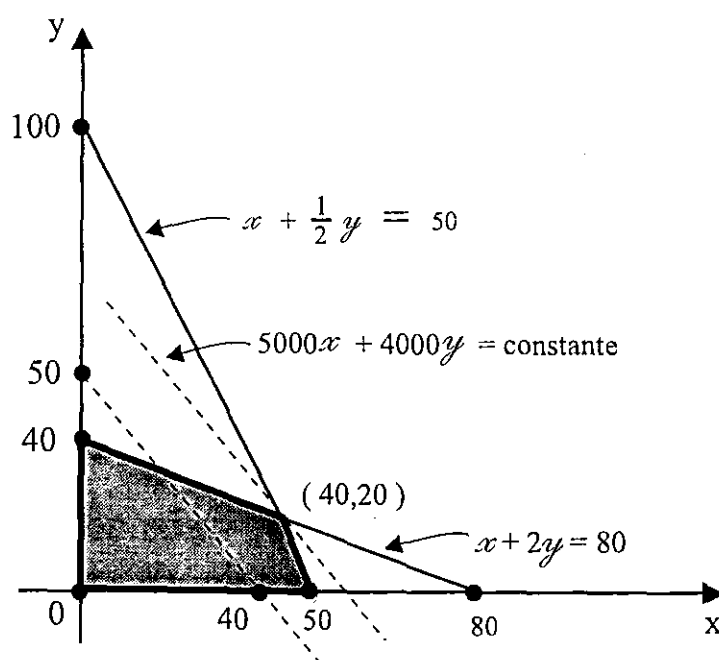



Figura 13.6

Isto é, deve-se ter

$$-1 \leq -\frac{c}{4000} \leq -\frac{1}{2},$$

ou seja

$$2000 \leq c \leq 8000.$$

Logo o lucro máximo por caixa de copos de vinho para a solução em (a) continuar ótima é Cr$ 8.000,00. Se o lucro por caixa ultrapassar este valor, a solução ótima para a ser atingida no ponto $(0, 40)$; ou seja, a fábrica passa a produzir exclusivamente copos de vinho.

13.7 a) Se a fábrica obtém Δkg a mais de carne desidratada, as restrições passam a ser

$$3x + 2y \leq 1200 + \Delta$$
$$x + 2y \leq 800$$
$$x \leq 300$$

Para Δ suficiente pequeno, a posição relativa das retas que delimitam o conjunto de soluções de cada restrição não se altera. Logo, a solução

ótima é a interseção das retas

$$3x + 2y = 1200 + \Delta \quad \text{e} \quad x + 2y = 800$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$x = 200 + \frac{\Delta}{2} \quad \text{e} \quad y = 300 - \frac{\Delta}{4}.$$

O faturamento correspondente à nova solução é:

$$400 \times \left(200 + \frac{\Delta}{2}\right) + 400 \times \left(300 - \frac{\Delta}{4}\right)$$
$$= 400 \times 200 + 400 \times 300 + 100\Delta.$$

Os dois primeiros termos dessa soma representa o faturamento antigo. Logo, o acréscimo no faturamento é dado por 100Δ cruzeiros.

b) Como cada Δkg adicionais de carne desidratada representam um acréscimo de 100Δ cruzeiros no faturamento, a empresa estará disposta a pagar até CR$ 100,00 por kg de carne desidratada.

c) Na solução ótima o consumo de farinha de soja é inferior à quantidade disponível. Portanto um aumento na quantidade de soja não altera a solução ótima. Logo, a empresa não estará disposta a pagar nenhuma quantia para obter mais farinha de soja.

13.8 Sejam x e y o nº de gramas de VITAMIL E VITAMEX, respectivamente, a serem ingeridos diariamente.

As restrições são:

$$\begin{aligned} 250x + 500y &\geq 2500 \quad (\text{isto é, } x + 2y \geq 10) \\ 100x + 80y &\geq 400 \quad (\text{isto é, } 5x + 4y \geq 20) \\ 4x + 5y &\geq 30 \\ 6x + 20y &\geq 60 \quad (\text{isto é, } 3x + 10y \geq 30) \\ x &\geq 2 \\ 3x &\geq 5 \quad (\text{isto é, } x \geq \frac{5}{3}) \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

O objetivo é minimizar $30x + 20y$.

A figura 13.8 indica o conjunto de soluções viáveis.

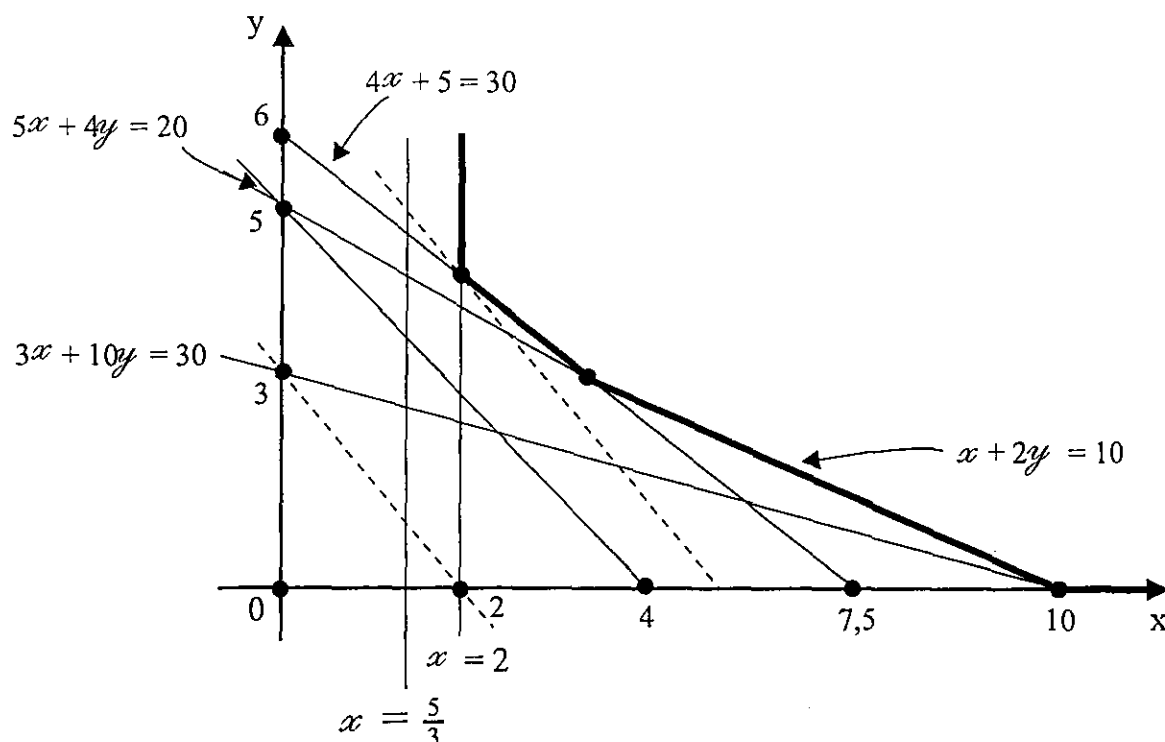



Figura 13.8

O valor mínimo ocorre na interseção das retas $x = 2$ e $4x + 5y = 30$, que é $(2, \frac{22}{5})$. Logo a dieta ótima consiste em $2g$ de VITAMIL e $4,4g$ de VITAMEX.

13.9 a) Os pontos (x, y) do plano tais que $y \leq x^2$ são os pontos situados abaixo do gráfico da parábola $y = x^2$ (Figura 13.9a)

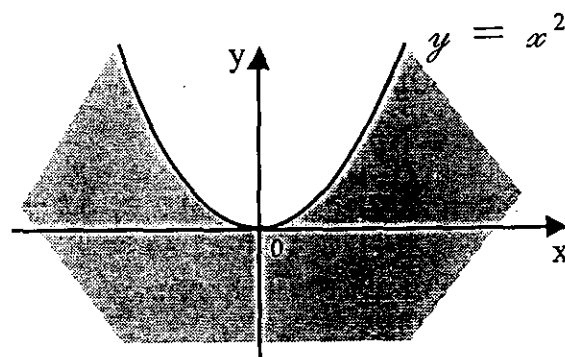



Figura 13.9a

b) Ver Figura 13.9b

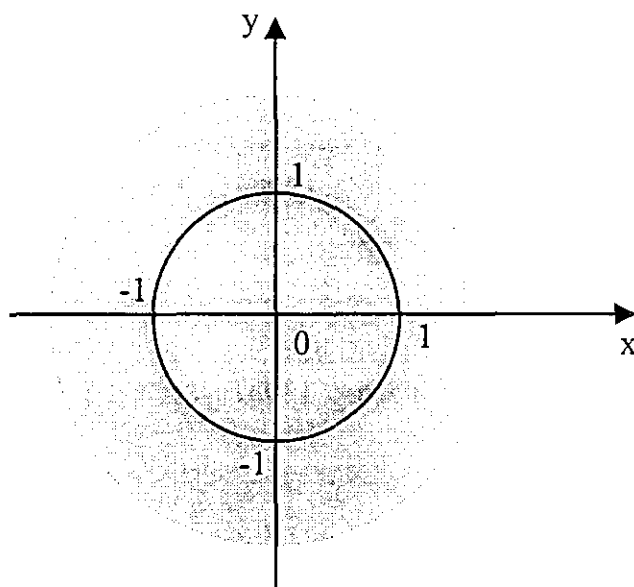



Figura 13.9b

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 3^2$.

O gráfico é formado pelos pontos do disco (fechado) de centro $(2, -1)$ e raio 3 (Fig. 13.9c).

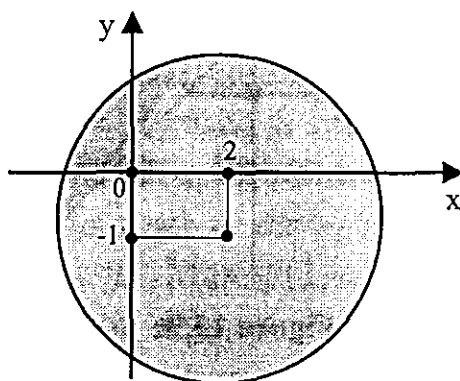



Figura 13.9c

d) A elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ separa o plano em duas regiões. Os pontos da região interior à elipse satisfazem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$; os pontos exteriores à elipse satisfazem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$. O gráfico é o da figura 13.9d

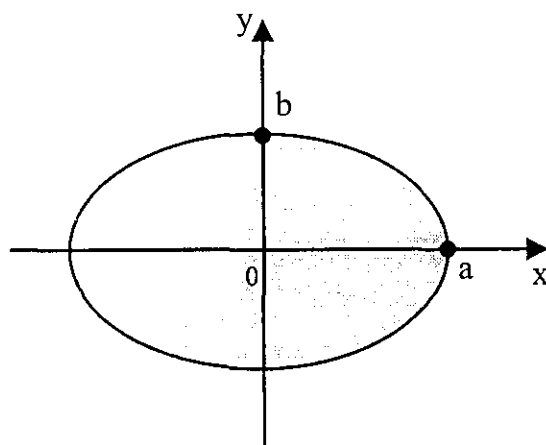



Figura 13.9d

e) A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ separa o plano em 3 regiões. Os pontos da região que contém a origem satisfazem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$; os das duas outras satisfazem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$. O gráfico é o da figura 13.9e.

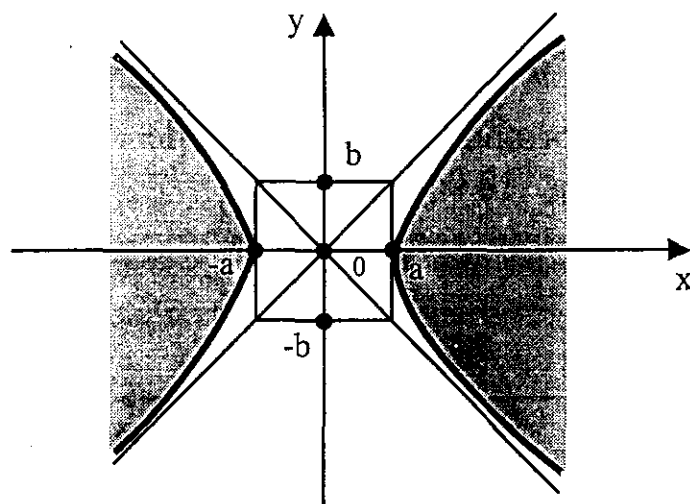



Figura 13.9e

13.10 a) A equação da reta $2x+3y-6=0$ pode ser escrita na forma $y = -\frac{2x}{3} + 2$. Logo, os pontos abaixo da reta são aqueles tais que $y \leq -\frac{2x}{3} + 2$ ou, equivalentemente, $2x + 3y - 6 \leq 0$.

b) As equações dos lados são $y = x, y = 0$ e $3x + y = 1$. Para encontrar o semiplano determinado por cada lado que contém o interior do triângulo, basta testar o terceiro vértice do triângulo. Por exemplo,

$y = x$ é a equação do lado determinado por $(0,0)$ e $(3,3)$. Como $(4,0)$ é tal que $y \leq x$, esta é a desigualdade cujas soluções incluem o interior do triângulo. Agindo de modo análogo para cada lado obtemos.

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 12. \end{cases}$$

c) Os pontos interiores à circunferência satisfazem $(x-1)^2 + y^2 < 1$. Logo, a região pedida é dada por

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 1 \\ y > 0. \end{cases}$$

14.1 Como $5x(-6) = 2x(-15)$ mas $2x9 \neq 3x(-6)$, as equações à esquerda definem retas paralelas. Por outro lado, como $2x(-15) = -3x10$ e $-3x5 = 1x(-15)$, as equações à direita definem a mesma reta.

14.2 Sejam $\varphi(x,y) = ax + by$ e $\psi(x,y) = a'x + b'y$. Se $\psi = k\varphi$ então a linha de nível c de φ é linha de nível $k \cdot c$ de ψ, logo estas duas funções têm as mesmas linhas de nível. Reciprocamente, se φ e ψ têm as mesmas linhas de nível então a linha de nível 1 de φ é, digamos, a linha de nível k de ψ. Ora, os pontos $(1/a, 0)$ e $(0, 1/b)$ pertencem à linha de nível 1 de $\varphi(x,y) = ax + by$, e portanto à linha de nível k de $\psi(x,y) = a'x + b'y$. Mas $\psi(1/a, 0) = a'/a$ e $\psi(0, 1/b) = b'/b$. Logo, $a'/a = b'/b = k$, ou seja, $a' = ka$ e $b' = kb$. Noutras palavras, $\psi = k \cdot \varphi$.

14.3 Uma paralela à reta $2x - 3y = 1$ deve ser linha de nível $c \neq 1$ da função $\varphi(x,y) = 2x - 3y$ logo sua equação é $2x - 3y = c$, com $c \neq 1$. Como a paralela passa pelo ponto $(-1,-3)$, deve ser $2 \times (-1) - 3 \times (-3) = c$, isto é, $c = 7$. A equação procurada é portanto $2x - 3y = 7$.

14.4 Se as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ forem paralelas, existe k tal que $a' = ka$ e $b' = kb$. Então podemos escrever $(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b +$

$\mu b')y = (\lambda + \mu k)ax + (\lambda + \mu k)by = a''x + b''y$, onde $a'' = (\lambda + \mu k)a$ e $b'' = (\lambda + \mu k)b$, logo a equação $(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y = \lambda c + \mu c'$ representa uma reta paralela a ambas ou coincidente com uma das retas dadas. (Supõe-se implicitamente que $\lambda a + \mu a'$ e $\lambda b + \mu b'$ não se anulam simultaneamente.)

14.5 A fim de que a reta $(1+2\lambda)x+(1-2\lambda)y = 1$ seja paralela à reta $2x + 3y = 5$ deve-se ter, em primeiro lugar, $3(1 + 2\lambda) = 2(1 - 2\lambda)$, ou seja, $\lambda = -1/10$. Em seguida, deve-se ter $5(1 - 2\lambda) \neq 1 \cdot 3$ com este valor de λ, isto é, $5(1+2/10) \neq 3$, o que é verdade pois $5(1+2/10) = 6$.

15.1 A distância entre as retas paralelas $3x + 4y = 10$ e $3x + 4y = 15$ é $(15 - 10)/\sqrt{3^2 + 4^2} = 5/5 = 1$.

15.2 Os pontos sobre os quais a altura do telhado é 15 são aqueles cujas coordenadas (x, y) cumprem a condição $2x + 3y + 1 = 15$, logo constituem a reta de equação $2x+3y = 14$. O menor deslocamento que se pode dar ao ponto $P = (3, 1)$ para chegar a essa reta é a distância de P à reta, ou seja, é $|2 \times 2 + 3 \times 1 - 14|/\sqrt{2^2 + 3^2} = 5/\sqrt{13}$.

15.3 Os pontos do piso sobre os quais a altura do telhado é a mesma que no ponto $(3, 1)$ formam a reta de equação $2x+3y+1 = 2\times 3+3\times 1 + 1$, ou seja, $2x + 3y = 9$. A altura do telhado é 15 sobre os pontos da reta $2x + 3y = 14$. Dentre estes, o que está mais próximo do ponto $(3, 1)$ é a interseção dessa reta com a perpendicular a ela baixada pelo ponto $(3, 1)$. A equação da perpendicular é da forma $3x - 2y = c$, com $c = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$, logo $3x - 2y = 7$. A interseção das retas $2x + 3y = 14$ e $3x - 2y = 7$ é o ponto $(28/13, 49/13)$.

15.4 Segue-se imediatamente do que foi dito no Exemplo 1 da seção 15 que $x' = (x + y)/\sqrt{2}$ e $y' = (y - x)/\sqrt{2}$. Resolvendo estas equações nas incógnitas x, y obtém-se $x = (x' - y')/\sqrt{2}$ e $y = (x' + y')/\sqrt{2}$.

15.5 Efetuando, na equação $x^2 + xy + y^2 = 1$ as substituições $x = (x' - y')/\sqrt{2}$ e $y = (x' + y')/\sqrt{2}$, os termos que contém o produto $x'y'$ se cancelam, obtendo-se $3x'^2 + y'^2 = 2$, logo o conjunto A é uma elipse, com centro na origem e eixos sobre as retas $y = x$ e $y = -x$.

16.1 A afirmação resulta imediatamente do exercício 14.4 pois as retas $2x + 6y = 5$ e $3x + 9y = 1$ são paralelas. Também se pode argumentar diretamente, observando que, para m, n e m', n' quaisquer, as retas $(2m + 3n)x + (6m + 9n)y = 5m + n$ e $(2m' + 3n')x + (6m' + 9n')y = 5m' + n'$ cumprem a condição $(2m + 3n)(6m' + 9n') = (6m + 9n)(2m' + 3n')$.

16.2 Aplicando o Corolário 1' da seção 14, vê-se que, para quaisquer valores de m e n, a reta $m(2x+6y-5)+n(3x+9y-3/2) = 0$ coincide com a reta $2x + 6y = 5$.

16.3 Dá-se uma reta $ax+by = c''$, paralela à reta $ax+by = c$. (Aqui, $c \neq c''$.) Deve-se encontrar um par de números reais m, n tais que $m(ax + by - c) + n(ax + by - c') = 0$ seja a equação da reta dada. Esta equação também se escreve sob a forma $(m+n)ax+(m+n)by = mc+nc'$. A fim de que ela defina uma reta, devemos supor $m+n \neq 0$. Então podemos escrevê-la como $ax+by = (mc+nc')/(m+n)$. Podemos encontrar m, n tais que $m + n \neq 0$ e $(mc + nc')/(m + n) = c''$. Basta, por exemplo, tomar $n = 1$ e $m = (c'' - c')/(c' - c'')$. Para esta escolha de m e n, tem-se $m(ax + by - c) + n(ax + by - c') = ax + by - c''$ logo a equação inicial define a reta $ax + by = c''$.

16.4 Supondo $ab' - ba' \neq 0$, as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ se encontram num ponto, cujas coordenadas chamaremos x_0 e y_0. Evidentemente, para quaisquer m, n reais, tem-se $m(ax_0 + by_0 - c) + n(a'x_0 + b'y_0 - c') = m(c - c) + n(c' - c') = 0$. Isto significa que todas as retas do feixe $m(ax + by - c) + n(a'x + b'y - c') = 0$ passam pelo mesmo ponto (x_0, y_0). Reciprocamente, seja $a'' + b''y = c''$ a equação de numa reta que passa por esse ponto. Como $ab' - ba' \neq 0$, existe um único par de números reais m, n tais que $ma + na' = a'', mb + nb = b''$. Segue-se daí que $c'' = a''x_0 + b''y_0 = (ma + na')x_0 + (mb + nb')y_0 = m(ax_0 + by_0) + n(a'x_0 + b'y_0) = mc + nc'$. Portanto, para estes valores de m e n, tem-se $m(ax + by - c) + n(a'x + b'y - c) = (ma + na')x + (mb+nb')y - (mc+nc') = a''x + b''y - c''$. Assim, a reta $a''x + b''y = c''$ pertence ao feixe considerado, o qual contém, por conseguinte, todas as retas que passam pelo ponto (x_0, y_0).

16.5 A equação do feixe de retas que passam pelo ponto (x_0, y_0) pode também ser escrita $(ma + na')x + (mb + nb')y = mc + nc'$. Dentre elas, a vertical é a que tem $mb + nb' = 0$. A maneira mais simples de cumprir esta condição é tomar $m = b'$ e $n = -b$. Então a equação dessa vertical é $(ab' - ba')x = cb' - bc'$, ou seja, $x = (cb' - bc')/(ab' - ba')$. De modo análogo, a reta horizontal que passa pelo ponto (x_0, y_0) tem equação $y = (ca' - ac')/(ab' - ba')$. Isto fornece as coordenadas x_0 e y_0 do ponto comum a todas as retas do feixe, ou seja, as soluções do sistema de equações $ax + by = c, a'x + b'y = c'$.

Se $ab' - ba' = 0$ então uma reta arbitrária $(ma + na')x + (mb + nb')y = mc + nc'$ do feixe tem a mesma inclinação que a reta $ax + by = c$ pois $(ma + na')b - (mb + nb')a = m(ab - ab) + n(ba' - ab') = 0$. Além disso, como $(mc + nc')a - (ma + na')c = m(ac - ac) + n(ac' - ca')$, segue-se do Corolário 1', seção 14, que as retas do feixe são todas paralelas à reta $ax + by = c$ quando $ab' - ba' = 0$ e $ac' - ca' \neq 0$. Finalmente, o feixe se reduz a uma única reta quando $ab' - ba' = ac' - ca' = 0$.

16.6 A equação $m(2x + 3y - 5) + n(3x + 2y - 4) = 0$ também se escreve como $(2m + 3n)x + (3m + 2n)y = 5m + 4n$. Ela representa uma reta vertical quando $3m + 2n = 0$, o que ocorre, por exemplo, se $m = 2$ e $n = -3$. Estes (ou quaisquer outros) valores de m e n que anulam o coeficiente de y mostram que a reta vertical do feixe tem equação $(2 \times 2 - 3 \times 3)x = 5 \times 2 - 4 \times 3$, ou seja, $x = 2/5$. Analogamente, os valores $m = 3$ e $n = -2$ fornecem a reta horizontal $y = 7/5$. Portanto, o ponto comum a todas as retas do feixe é o ponto $(2/5, 7/5)$, cujas coordenadas são as soluções do sistema $2x + 3y = 5, 3x + 2y = 4$.

17.1 Em primeiro lugar, todos os pontos (x, y) com $x = a\cos\theta$ e $y = b \text{ sen } \theta$ pertencem à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. E reciprocamente: se o ponto (x, y) pertence a esta elipse então o ponto $(x/a, y/b)$ pertence ao círculo de centro 0 e raio 1, logo existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $x/a = \cos\theta, y/b = \text{ sen } \theta$, donde $x = a\cos\theta, y = b \text{ sen } \theta$.

17.2 Não há perda de generalidade em supor $a > 0$ e $b > 0$. Em primeiro lugar, se $x = a\sec\theta$ e $y = b \text{ tg } \theta$ então $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \sec^2\theta - \text{ tg }^2\theta = 1$, logo todos os pontos (x, y) com $x = a \sec\theta, y =$

b tg θ pertencem à hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Reciprocamente, seja (x, y) pertencente a essa hipérbole. Se $x > 0$, escolhe-se no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ o número θ tal que tg $\theta = y/b$. Então $(x/a)^2 = 1 +$ $(y/b)^2 = 1 +$ tg $^2\theta = \sec^2\theta$. Como x/a e sec θ são positivos, segue-se que $x/a = \sec\theta$ e $x = a \sec\theta$. Caso seja $x < 0$, escolhe-se θ no intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$, no qual sec $\theta < 0$, de modo que se tenha tg $\theta = y/b$. Como antes, conclui-se que $x = a\sec\theta$. Portanto, quando θ varia no conjunto $(-/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$, o ponto (sec θ, tg θ) descreve a hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

17.3 A elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x = a(t^2-1)/(t^2+1)$, $y = 2bt/(t^2+1)$, onde o parâmetro t assume todos os valores reais. Esta parametrização exclui o ponto $(-a, 0)$ da elipse, o qual pode ser considerado como correspondente à posição de (x, y) quando $t = \pm\infty$.

17.4 O ponto (x, y) está no primeiro quadrante quando t varia de 0 a 1, no segundo quando t vai de 1 a $+\infty$, no quarto quando t está entre 0 e -1 no terceiro quando t decresce de -1 a $-\infty$.

17.5 As equações paramétricas da reta que liga o ponto $N = (0, 1)$ ao ponto $Q = (u, 0)$ são $x = tu, y = 1 - t$. Além do ponto N, esta reta tem em comum com a circunferência C, de equação $x^2 + y^2 = 1$, o ponto onde $t^2y^2 + (1-t)^2 = 1$, ou seja, onde $t = 2/(u^2+1)$ e $y = 1 - t = (u^2-1)/(u^2+1)$. As equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N = (0, 1)$ e $P = (x, y)$ da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ são $\overline{x} = tx, \overline{y} = 1 + t(y-1)$. Esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, quando $\overline{y} = 0$, ou seja, quando $t = 1/(1-y)$. Isto dá $u = \overline{x} = tx = x/(1-y)$. Segue-se imediatamente que a função $\xi\colon C - \{N\} \to \mathbb{R}$, dada por $\xi(x, y) = x/(1-y)$, é uma bijeção, cuja inversa $\xi^{-1}\colon \mathbb{R} \to C - \{N\}$, é dada por $\xi^{-1}(u) = (x, y)$, onde $x = 2u/(u^2+1), y = (u^2-1)/(u^2+1)$. Quando o parâmetro u percorre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o ponto $\xi^{-1}(u)$ percorre $C - \{N\}$, tendo-se deste modo uma parametrização da circunferência por funções racionais, correspondendo o ponto N aos valores $\pm\infty$ do parâmetro u. (A parametrização do Exemplo 2 difere desta por uma

rotação de 900 no sentido positivo.)

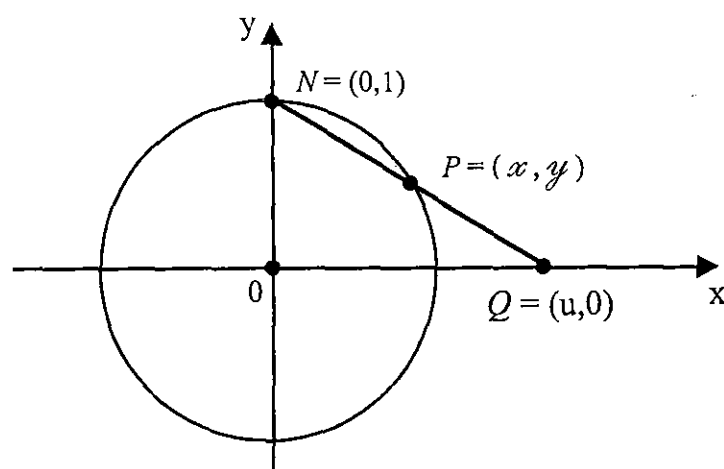



Figura 17.5

Observação: A existência de uma parametrização racional permite resolver o problema de achar os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ cujas coordenadas x e y são ambas racionais. Se, por exemplo, usarmos a parametrização $x = 2u/(u^2 + 1)$, $y = (u^2 - 1)/(u^2 + 1)$, veremos que x e y são ambos racionais se, e somente se, $u = x/(1 - y)$ é racional. Pondo $u = m/n$, a relação $x^2 + y^2 = 1$ se transforma em $[2mn/(m^2+n^2)]^2+[(m^2-n^2)/(m^2+n^2)]^2 = 1$, ou seja, $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$. Atribuindo valores inteiros positivos arbitrárias a m e n, vê-se então que os números $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ e $c = n^2 + n^2$ constituem um "terno pitagórico", isto é, são medidas inteiras dos lados de um triângulo retângulo. Mais ainda: se admitirmos (como é lícito) apenas os ternos pitagóricos tais que a, b e c são primos entre si (donde quaisquer dois deles são também primos entre si) e b é ímpar, então as expressões $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$ fornecem todos os ternos pitagóricos. Com efeito, de $a^2+b^2 = c^2$ resulta $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, logo $(a/c, b/c)$ é um ponto de coordenadas racionais da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Portanto existem números naturais m, n, primos entre si, tais que $a/c = 2mn/(m^2+n^2)$ e $b/c = (m^2-n^2)/(m^2+n^2)$. Usando as hipóteses feitas sobre a, b e c conclui-se daí (com um pequeno trabalho) que as frações $2mn/(m^2+n^2)$ e $(m^2-n^2)/(m^2+n^2)$ são irredutíveis, logo $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$.

Soluções dos Exercícios da Segunda Parte

18.1 Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), suponha que $\alpha u+\beta v=\alpha' u+\beta' v$. Daí decorre que $(\alpha-\alpha')u+(\beta-\beta')v=0$ logo, em virtude de (a), concluímos que $\alpha-\alpha'=0$ e $\beta-\beta'=0$, isto é, $\alpha=\alpha'$ e $\beta=\beta'$. A fim de provar que (b) $\Rightarrow$ (c) suponha, por absurdo, que u fosse múltiplo de v, logo $u=kv$. Daí resultaria que $0\cdot u+0\cdot v=1\cdot u+(-k)\cdot v=0$, contrariando (b). Em seguida, suponhamos que (c) seja verdadeira. Então as retas $\alpha x+\beta y=0$ e $\alpha' x+\beta' y=0$ são concorrentes, logo $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, pelo que foi visto na seção 14. Portanto, (c) $\Rightarrow$ (d). A implicação (d) $\Rightarrow$ (e) foi provada no Teorema da seção 18. Finalmente, se tivermos $\alpha u+\beta v=0$, com $\alpha\neq 0$ (digamos) então $u=-(\beta/\alpha)v$, logo as combinações lineares de u e v darão apenas múltiplos de v. Isto mostra que (e) $\Rightarrow$ (a).

18.2 A expressão $w=\alpha u+\beta v$ significa $(1,1)=(-2\alpha+\beta,\alpha-\beta)$, ou seja, $-2\alpha+\beta=1$ e $\alpha-\beta=1$. Resolvendo este sistema, obtém-se $\alpha=-2$, $\beta=-3$. Portanto, $w=-2u-3v$ é a combinação linear pedida.

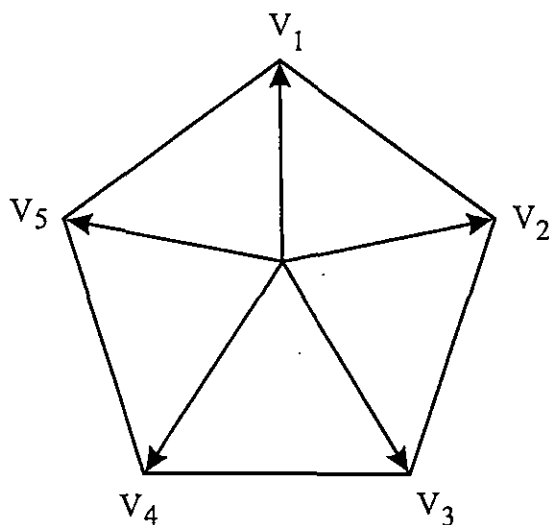



Figura 18.3

18.3 Sejam $v_1 \cdots , v_n$ os vetores dados. Para provar que $w = v_1 + \cdots + v_n$ é igual a zero, damos a todos esses vetores uma rotação de $360^0/n$ em torno do centro do polígono. Essa rotação transforma v_1 em v_2, v_2 em $v_3, \cdots , v_n$ em v_1 e w é transformado no vetor w', obtido dele por rotação de $360^0/n$. Portanto $w' = v_2 + v_3 + \cdots + v_n + v_1$. Vê-se então que $w' = w$ e daí conclui-se que $w = 0$.

18.4 Tem-se, por um lado, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ e, por outro lado, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$. Somando membro a membro estas igualdades e levando em conta que $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{DF}$, vem $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, logo $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

18.5 Seja M o ponto médio do lado BC. Temos $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$ e, levando em conto uma propriedade conhecida da mediana, $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$. Portanto $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = 0$.

18.6 Seja $v = k \cdot u$. Então $\alpha u+\beta v+\gamma w = 0$ significa que $(\alpha+\beta k)u+\gamma v = 0$. Pelo exercício 18.1, segue-se que $\gamma = 0$ e $\alpha + \beta k = 0$, donde $\alpha u + \beta v = 0$.

18.7 Seja $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ}$. Então PQ e BC são diagonais do paralelogramo $BPCQ$, logo cortam-se mutuamente ao meio. Como $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$, temos $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PA}$. Segue-se que a reta PA é mediana do triângulo ABC. O mesmo vale para as retas PB e PC, portanto P é o baricentro de ABC.

19.1 Como $|u|$ é um número não-negativo, o comprimento do vetor $|u|v$ é $|u|$ vezes o comprimento de v, ou seja, é igual a $|u||v|$. Pelo mesmo motivo, o comprimento de $|v|u$ também é igual a $|u||v|$.

19.2 Supondo $|u| = |v|$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle u+v, u-v\rangle &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= |u|^2 - |v|^2 = 0.\end{aligned}$$

19.3 Pelo exercício 19.1, OR é a diagonal do losango $OPRQ$, logo é a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$. Se $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ são coordenadas num sistema de eixos arbitrário OXY então a inclinação da bissetriz é $(b\sqrt{c^2+d^2} + d\sqrt{a^2+b^2})/(a\sqrt{c^2+d^2} + c\sqrt{a^2+b^2})$.

19.4 Tem-se

$$\begin{aligned}|u+v|^2 + |u-v|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle + |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u,v\rangle. \\ &= 2|u|^2 + 2|v|^2.\end{aligned}$$

19.5 Tem-se $|u-v|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u,v\rangle$, portanto

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u-v|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|u_1|^2 + |v_1|^2 - |u_1 - v_1|^2) = \langle u_1 - v_1\rangle.\end{aligned}$$

A conclusão final decorre do fato de que u, v e $u-v$ são representados pelos lados de um triângulo e que, se θ é o ângulo entre u e v, então $\langle u,v\rangle = |u|\cdot|v|\cdot cos\theta$.

19.6 A primeira, a quarta, a quinta e a sexta. A segunda valeria apenas para $\lambda \geq 0$. A terceira falha grosseiramente.

19.7 Basta provar (2) porque as demais afirmações são óbvias. Por outro lado, a afirmação (2) é o exercício 3.10.

19.8 Se θ é o ângulo entre os vetores u e v, sabemos que $\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\theta$. Portanto $\langle u, v\rangle = \pm|u||v|$ se, e somente se, $\cos\theta = \pm 1$, ou seja, $\theta = 0$ ou $\theta = 180^0$. Estes são exatamente os casos em que os vetores dados são múltiplos um do outro. Em seguida, observamos que $(|u| + |v|)^2 - |u+v|^2 = 2|u||v|(1-\cos\theta)$, de modo que se tem $|u+v| = |u| + |v|$ se, e somente se, $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$. Isto se dá precisamente quando um dos vetores dados é o produto do outro por um número não-negativo.

19.9 Introduzindo um sistema de eixos ortogonais, escrevemos $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$. Então $u^* = (-y, x)$ e $v^* = (-y', x')$. Portanto

$$\begin{aligned}(\alpha u + \beta v)^* &= (-\alpha y - \beta y', \alpha x + \beta x') = \alpha(-y, x) + \beta(-y', x')\\ &= \alpha u^* + \beta u^*\end{aligned}$$

e

$$\langle u, v^*\rangle + \langle u^*, v\rangle = -xy' + yx' - yx' + xy' = 0$$

19.10 Diante das notações introduzidas, a igualdade proposta significa

$$\langle u, w\rangle - \langle u+v, v+w\rangle + \langle u+v+w, v\rangle = 0,$$

o que é óbvio em virtude da distributividade do produto interno em relação à adição de vetores. Quando CD e BD são alturas do triângulo ABC, as duas primeiras parcelas se anulam, resultando que $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$, logo AD também é altura de ABC. Portanto, se duas alturas de um triângulo encontram-se no ponto D, a terceira altura também passa por D.

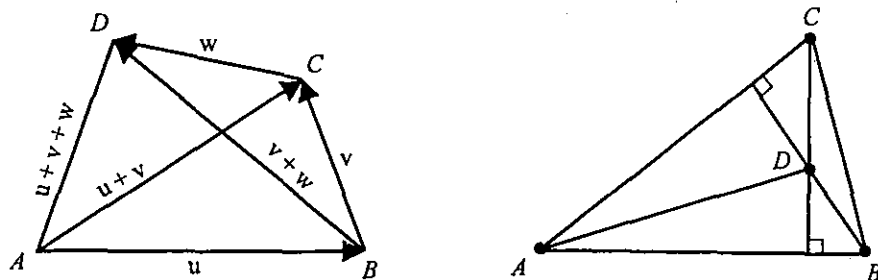



Figura 19.10

20.1 Supondo (a), tem-se $C = \alpha A + \beta B$ com $\alpha + \beta = 1$. Então $\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AB}$. Logo, para qualquer ponto O do plano, vale

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} &= (1-\beta)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \beta \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Assim, (a) $\Rightarrow$ (b). É óbvio que (b) $\Rightarrow$ (c). Admitindo (c), podemos escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}\\ &= \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = (1-\beta)\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}\\ &= \beta(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = \beta\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Portanto, (c) $\Rightarrow$ (d). Finalmente, se vale (d), isto é, se $\overrightarrow{AC} = \beta \cdot \overrightarrow{AB}$, então $C = A + \overrightarrow{AC} = A + \beta \cdot \overrightarrow{AB}$ logo por definição, $C = \alpha A + \beta B$.

20.2 Pelo exercício anterior, podemos fixar um ponto arbitrário O do plano e escrever $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OB_1}$. Subtraindo a primeira igualdade da segunda resulta $\overrightarrow{CC_1} = \alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1}$.

20.3 Pelo exercício 20.2, podemos escrever $\overrightarrow{A_0B_0} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{A_1B_1}$. Se chamarmos de X o ponto que resulta de B_0 por rotação positiva de 90^0 em torno de A_0, o exercício 19.9 garante que $\overrightarrow{A_0X} = (1-t)\overrightarrow{AB}^* + t\overrightarrow{A_1B_1}^* = \overrightarrow{A_0B_0}^*$, portanto $X = B_0^*$.

20.4 Se os pontos P e Q pertencem ao disco D e $0 \leq t \leq 1$ então, pondo $X = (1-t)P + tQ$ temos $\overrightarrow{AX} = (1-t)\overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{AQ}$, logo

$$|\overrightarrow{AX}| \leq (1-t)|\overrightarrow{AP}| + t|\overrightarrow{AQ}| \leq (1-t)r + tr = r.$$

Assim, todo ponto X do segmento PQ pertence ao disco D.

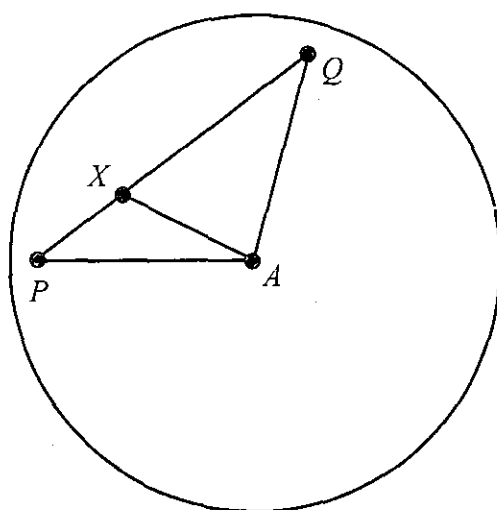



Figura 20.4

20.5 Se os pontos P, Q pertencem a $X \cap Y$ então, como X é convexo, o segmento de reta PQ está contido em X. Pela mesma razão, esse segmento está contido em Y, logo $PQ \subset X \cap Y$. Assim, $X \cap Y$ é convexo.

20.6 Sendo $\alpha + \beta + \gamma = 1$ as três somas $\alpha + \beta, \alpha + \gamma$ e $\beta + \gamma$ não podem ser simultaneamente iguais a zero (pois somando-as teríamos $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$). Suponhamos, para fixar idéias, que seja $\alpha + \beta \neq 0$. Então podemos escrever $\alpha x + \beta y + \gamma z = (\alpha + \beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right] + \gamma z$. Como $\alpha/(\alpha + \beta) + \beta/(\alpha + \beta) = 1$, a expressão dentro dos colchetes é um ponto w de X. Como $(\alpha + \beta) + \gamma = 1$, temos $(\alpha + \beta)w + \gamma z \in X$. Portanto $\alpha x + \beta y + \gamma z \in X$.

20.7 Seja Z a reunião dos segmentos da reta que ligam os pontos de X pontos de Y. Dois pontos típicos de Z são $R = (1 - t)P + tQ$, $R' = (1 - t)P' + tQ'$, onde $P, P' \in X$, $Q, Q' \in Y$ e $t, t' \in [0, 1]$. Para provar que Z é convexo, devemos tomar um número $s \in [0, 1]$ qualquer e mostrar que o ponto $S = (1 - s)R + sR'$ pertence a Z. Ora, temos

$$\begin{aligned} S &= (1 - s)(1 - t)P + s(1 - t')P' + (1 - s)tQ + st'Q' = \\ &= \alpha P + \beta P' + \gamma Q + \delta Q', \end{aligned}$$

onde

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1] \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} S &= (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}P + \frac{\beta}{\alpha+\beta}P'\right] \\ &\quad + (\gamma+\delta)\left[\frac{\gamma}{\gamma+\delta}Q + \frac{\delta}{\gamma+\delta}Q'\right] \\ &= (\alpha+\beta)T + (\gamma+\delta)T', \end{aligned}$$

com $T \in X$, $T' \in Y$. Logo $S \in Z$

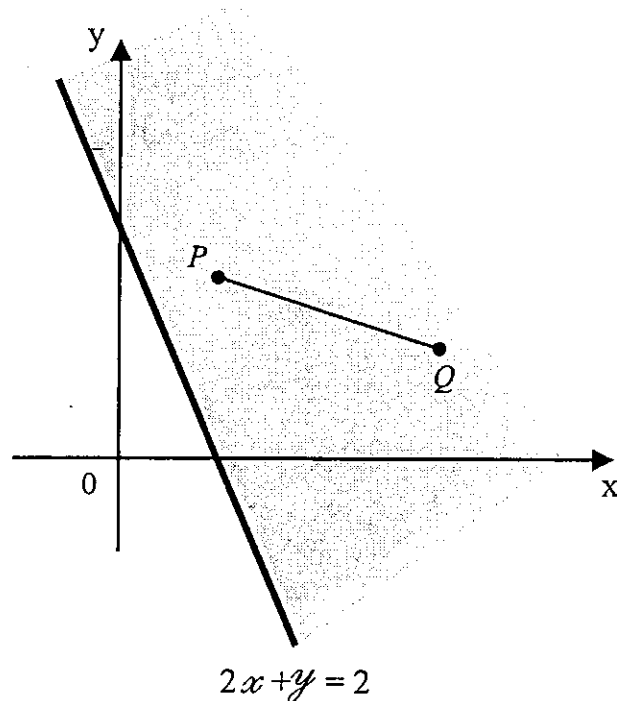



Figura 20.8

20.8 Seja $A = (a,b)$. O conjunto em questão, que chamaremos X, é formado pelos pontos $P = (x,y)$ tais que $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} \rangle \geq c$. Se $Q = (w,z)$ também pertence ao conjunto X e $t \in [0,1]$ então o ponto $R = (1-t)P + tQ$ é tal que $\overrightarrow{OR} = (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$, logo $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR} \rangle = (1-t)\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PO} \rangle + t\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} \rangle \geq (1-t)c + tc = c$. Assim, $R = (k1-t)P + tQ$ pertence a X e o conjunto X é convexo.

20.9 Sejam $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ pontos do conjunto Z. Temos $y \geq 1/x$ e $y' \geq 1/x'$. Dado $t \in [0, 1]$, queremos provar que o ponto $Q = (1-t)P + tP'$ pertence a Z. Temos $Q = ((1-t)x + tx', (1-t)y + ty')$, com

$$\begin{aligned}
[(1-t)x + tx'][(1-t)y + ty'] &\geq [(1-t)x + tx']\left[\frac{(1-t)}{x} + \frac{t}{x'}\right] \\
&= (1-t)^2 + t^2 + t(1-t)\left[\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}\right] \\
&\geq (1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t) = 1,
\end{aligned}$$

portanto Q pertence a Z. (Neste argumento, fizemos uso do fato de que se a e b são números positivos então $a/b + b/a \geq 2$. Isto se prova observando que $a/b + b/a = (a^2 + b^2)/ab$ e, como $(a-b)^2 \geq 0$, ou seja $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, tem-se $a^2 + b^2 \geq 2ab$, portanto $(a^2 + b^2)/ab \geq 2$.)

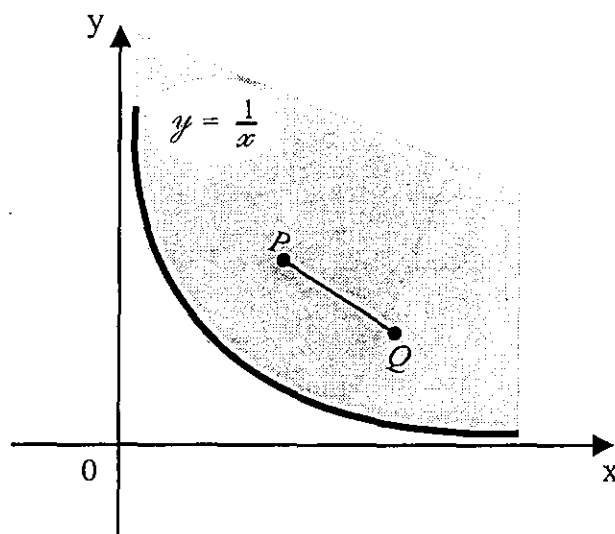



Figura 20.9

20.10 Sejam $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ pontos do conjunto W. Então $x \leq y^2$ e $x' \leq y'^2$. Dado $t \in [0, 1]$, devemos mostrar que o ponto $Q = (1-t)P + tP'$ pertence a W. As coordenadas de Q são $(1-t)x + tx'$ e $(1-t)y + ty'$. Basta mostrar que

$$[(1-t)x + tx']^2 \leq (1-t)x^2 + tx'^2, \qquad (*)$$

pois já sabemos que $(1-t)x^2 + tx'^2 \leq (1-t)y + ty'$. A desigualdade $(*)$ se prova agrupando seus termos no primeiro membro, como um polinômio em t, o que fornece $(x-x')^2t^2 - (x-x')^2t \leq 0$, ou seja, $t^2 - t \leq 0$, o que é evidente, pois $0 \leq t \leq 1$.

20.11 Sejam A, B, C três pontos não-colineares no conjunto X. Dado qualquer ponto P no plano Π, mostraremos que P é uma combinação afim de dois pontos de X, portanto pertence a X. Suponhamos, inicialmente, que a reta AP não seja paralela a BC. Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, existem números reais x, y tais que $\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$. Afirmamos que $x + y \neq 0$. Com efeito, se fosse $x+y=0$, ou seja, $y=-x$ teríamos $\overrightarrow{AP} = x(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = x \cdot \overrightarrow{CB}$, logo as retas AP e BC seriam paralelas. Portanto podemos escrever

$$\overrightarrow{AP} = (x+y)\left[\frac{x}{x+y}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AC}\right].$$

Pondo $\beta = x/(x+y), \gamma = y/(x+y)$, temos $\beta + \gamma = 1$. O ponto $P_0 = \beta B + \gamma C$ pertence a X e a igualdade acima significa que $\overrightarrow{AP} = (x+y) \cdot \overrightarrow{AP_0}$. Escrevendo $\alpha = x+y$ temos então $P = (1-\alpha)A + \alpha \cdot P_0$, logo P, sendo uma combinação afim de dois pontos de X, pertence a X. Caso a reta AP seja paralela a BC, trocamos os papéis de A e B no argumento acima e concluimos que num ponto arbitrário P do plano Π pertence a X.

Para terminar, consideremos um ponto A em X. Se houver outro ponto B em X, a reta AB estará contida em X. Se não houver pontos de X fora desta reta, teremos $X = AB$. Se houver em X um ponto C fora de AB então, como vimos acima, o conjunto X é todo o plano Π.

21.1 Seja u um vetor unitário paralelo a r. Temos $v' = \langle v, u\rangle u$ e $w' = \langle w, u\rangle u$, portanto

$$\begin{aligned}(v+w)' &= \langle v+w,u\rangle u = \langle v,u\rangle u + \langle w,u\rangle u = v'+w';\\ (v')' &= \langle v',u\rangle u = \langle\langle v,u\rangle u,u\rangle u = \langle v,u\rangle\langle u,u\rangle u = \langle v,u\rangle u = v';\\ \langle v,w'\rangle &= \langle v,\langle w,u\rangle u\rangle = \langle w,u\rangle\langle v,u\rangle\\ &= \langle v,u\rangle\langle u,w\rangle = \langle\langle v,u\rangle u,w\rangle = \langle v',w\rangle.\end{aligned}$$

21.2 No começo, duas observações. Primeira: se dois vetores v e w são tais que $\langle v,z\rangle = \langle w,z\rangle$ para todo vetor z, então $v = w$. Com efeito, daí resulta $\langle v-w,z\rangle = 0$ para todo vetor z. Em particular, tomando $z = v-w$, tem-se $\langle v-w,v-w\rangle = 0$, logo $v-w = 0$, donde $v = w$. Segunda observação: da propriedade (c) acima deduz-se que $(\alpha\cdot v)' = \alpha\cdot v'$ para todo número real α e todo vetor v. Com efeito, qualquer que seja o vetor w, vale:

$$\langle(\alpha v)',w\rangle = \langle\alpha v,w'\rangle = \alpha\langle v,w'\rangle = \alpha\langle v',w\rangle = \langle av',w\rangle$$

portanto, em virtude da primeira observação, tem-se $(\alpha v)' = \alpha v'$. Agora, para o exercício propriamente dito. Excluindo o caso em que se tem $v' = 0$ para todo vetor v, existe algum w tal que $w' \neq 0$. Seja $w' = \overrightarrow{AB}$. Se existir algum vetor z tal que z' não seja paralelo à reta $r = AB$ (isto é, z' não seja um múltiplo de w') então todo vetor v será uma combinação linear $v = \alpha w' + \beta z'$. Neste caso, tem-se $v' = (\alpha w' + \beta z')' = \alpha w' + \beta z' = v$, ou seja, $v' = v$ para todo vetor v. Podemos então admitir que, para todo vetor v, tem-se v' paralelo à reta r. Então podemos escrever $v = v' + (v-v')$ onde $v-v'$ (afirmamos) é perpendicular a r. Com efeito, $\langle v-v',w'\rangle = \langle v,w'\rangle - \langle v',w'\rangle = 0$ pois $\langle v',w'\rangle = \langle v,(w')'\rangle = \langle v,w'\rangle$. A decomposição $v = v' + (v-v')$, com v' paralelo e $v-v'$ perpendicular à reta r, mostra que, para todo v, o vetor v' é a projeção ortogonal de v sobre a reta r.

21.3 Sejam w e z respectivamente vetores unitários paralelos às retas r e s. Temos $\langle u,w\rangle w = \langle v,w\rangle$ e $\langle u,z\rangle z = \langle v,z\rangle z$, logo $\langle u-v,w\rangle = \langle u-v,z\rangle = 0$. Tudo se reduz a mostrar que se um vetor v é ortogonal a dois vetores não colineares w e z então $v = 0$. Ora, pelo Teorema

da seção 18, existem números reais α, β tais que $v = \alpha w + \beta z$. Então $\langle v, v\rangle = \langle v, \alpha w + \beta z\rangle = \alpha\langle v, w\rangle + \beta\langle v, z\rangle = 0$, portanto $v = 0$.

21.4 Tem-se

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle.\end{aligned}$$

Portanto $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = |AB|^2$ se, e somente se, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$. Quando AB é perpendicular à reta r, que contém B, então o produto interno $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = |\overrightarrow{AB}|^2$ não depende do ponto C tomado sobre r porque $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$

22.1 O enunciado significa que cada vértice do triângulo pertence a duas das retas dadas, logo esses vértices são as soluções dos três sistemas que se obtêm com as equações $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y = 3$. Eles são $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, -3)$. A área do triângulo é portanto $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

22.2 A definição evidente é $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4$. Tem-se então

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

como pode se verificar facilmente. Se escrevermos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$, se supusermos que a notação é escolhida de modo que AC seja uma diagonal interna do quadrilátero $ABCD$, e, além disso que o sentido de rotação $ABCD$ seja o sentido positivo do plano, então o segundo membro da igualdade acima representa o dobro da soma das áreas dos triângulos ABC e ACD. Portanto o símbolo no primeiro membro representa o dobro da área do quadrilátero $ABCD$. Estender a definição para n pontos é imediato. Para provar que o símbolo assim definido é o dobro da área do polígono cujos vértices são os n pontos dados, é preciso saber que

todo polígono de n vértices, mesmo não convexo, decompõe-se em $n-2$ triângulos justapostos quando se traçam convenientemente $n-3$ diagonais internas. (Vide "Meu Professor de Matemática", pág. 109.)

22.3 Sejam $A = (-2,3)$, $B = (-1,0)$, $C = (1,0)$, $D = (2,3)$ e $E = (0,5)$. A área do pentágono $ABCDE$ é dada por

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3+10+3+10) = 13.$$

A mesma área pode também ser obtida pela Fórmula de Pick. (Vide "Meu Professor de Matemática", pág. 102.)

22.4 Tomemos um sistema de eixos no qual as coordenadas dos pontos dados sejam $A = (0,0)$, $B = (x,y)$, $C = (x',y')$, $B_1 = (\alpha,\beta)$, $\beta_2 = (\alpha',\beta')$. Então $x = \alpha + \alpha'$ e $y = \beta + \beta'$ e $\omega(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha+\alpha' & x' \\ \beta+\beta' & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha & x' \\ \beta & y' \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha' & x' \\ \beta' & y' \end{vmatrix} = \omega(AB_1C) + \omega(AB_2C)$.

22.5 Análogo ao exercício anterior.

22.6 Tomando um sistema de eixos no qual $O = (0,0)$, $A = (x,y)$, $B = (x',y')$ e $C = (x'',y'')$, tem-se $2\cdot\omega(OAB) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, $2\cdot\omega(OBC) = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$, $2\cdot\omega(OCA) = \begin{vmatrix} x'' & x \\ y'' & y \end{vmatrix}$ e $2\cdot\omega(ABC) = \begin{vmatrix} x'-x & x''-x \\ y'-y & y''-y \end{vmatrix}$.

Basta então verificar que

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & x \\ y'' & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'-x & x''-x \\ y'-y & y''-y \end{vmatrix}.$$

22.7 A generalização do exercício anterior diz que se $A_1A_2\cdots A_n$ é um polígono (convexo ou não) do plano então, para todo ponto O, tem-se $\omega(OA_1A_2) + \omega(OA_2A_3) + \cdots + \omega(OA_{n-1}A_n) + \omega(OA_nA_1) = \omega(A_1A_2\cdots A_n)$ = área orientada do polígono $A_1A_2\cdots A_n$. A demonstração se faz usando a fórmula para a área do polígono dada no exercício 22.2

22.8 A área do triângulo ABC é igual a $-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 7/2$. As medidas dos lados desse triângulo são $d(A,B) = \sqrt{5}$, $d(A,C) = \sqrt{10}$ e $d(B,C) = \sqrt{13}$. Como área = base × altura/2, as alturas desse triângulo medem $7/\sqrt{5}$, $7\sqrt{10}$ e $7/\sqrt{13}$.

23.1 Elevando B' ao quadrado e efetuando a multiplicação $4A'C'$, obtém-se:

$$\begin{aligned}(B')^2 &= A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta - 2AC\alpha^2 + 2BC\alpha\beta \\ 4A'C' &= 4A^2a^2b^2 - B^2\alpha^2 + 4C^2a^2b^2 - 2ABa^2\alpha + 4ACa^4 \\ &\quad + 2AB\alpha b^2 + 2BC\alpha a^2 + 4ACb^4 - 2BC\alpha b^2\end{aligned}$$

Observando que $4a^2b^2 = \alpha^2$, $-2ABa^2\alpha + 2ABa^2\beta = -2AB\alpha\beta$ e $2BC\alpha a^2 - 2BC\alpha b^2 = 2BC\alpha\beta$, podemos escrever:

$$4A'C = A^2\alpha^2 - B^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta + 4AC(a^4 + b^4) + 2BC\alpha\beta.$$

Levando em conta que $-2AC\alpha^2 = -8ACa^2b^2$, segue-se que:

$$\begin{aligned}(B')^2 - 4A'C' &= B^2(\alpha^2 + \beta^2) - 4AC(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) \\ &= B^2 - 4AC(a^2 + b^2)^2 \\ &= B^2 - 4AC.\end{aligned}$$

23.2 As substituições $x = u + h$, $y = v + k$ dão imediatamente $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = Au^2 + Buv + Cv^2 + D'u + E'v + F'$, onde $D' = 2Ah + Bk + D$, $E' = 2Ck + Bh + E$ e $F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$.

Se a mudança de eixos inverte a orientação, ela pode ser pensada como uma rotação, seguida de uma translação e, por fim, uma reflexão em torno de um dos novos eixos. As duas primeiras operações preservam Δ enquanto que a terceira apenas troca o sinal de uma das coordenadas, o que faz mudar o sinal de B porém não afeta o valor de $B^2 - 4AC$.

23.3 (a) Como $\cos 45^0 = \text{sen } 45^0 = 1/\sqrt{2}$, tem-se $x = (u-v)/\sqrt{2}$, $y = (u+v)/\sqrt{2}$. Levando em conta que $A = C$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\ &= \frac{A}{2}(u-v)^2 + \frac{B}{2}(u^2 - v^2) \\ &\quad + \frac{A}{2}(u+v)^2 + \frac{D}{\sqrt{2}}(u-v) + \frac{E}{\sqrt{2}}(u+v) + F \\ &= \left(A + \frac{B}{2}\right)u^2 + \left(A - \frac{B}{2}\right)v^2 + \frac{D+E}{\sqrt{2}}u - \frac{D-E}{\sqrt{2}}v + F \\ &= A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F. \end{aligned}$$

(b) Tem-se $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F$ onde $B' = -A \text{ sen } 2\theta + B\cos 2\theta + C \text{ sen } 2\theta$. Logo $B' = 0$ se, e somente se $\text{tg } 2\theta = \text{sen } 2\theta / \cos 2\theta = B/(A-C)$.

23.4 (a) $\Delta = -4AC = 0$ significa que pelo menos um dos números A, C é zero. Se $A = C = 0$, a equação reduz-se a $Dx + Ey + F = 0$, que representa uma reta. Se $A \neq 0$ e $C = 0$ a equação escreve-se como $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. Se tivermos ainda $E = 0$, ela se reduz a $Ax^2 + Dx + F = 0$, logo representa um par de retas paralelas (verticais), uma só reta (vertical) ou o conjunto vazio, conforme se tenha $D^2 - 4AF$ positivo, nulo ou negativo. Finalmente, se $E \neq 0$, a equação pode escrever-se como $y = (-A/E)x^2 - (D/E)x - F$, logo representa uma parábola. Se $A = 0$ e $C \neq 0$, a discussão é análoga.

(b) Se $\Delta = -4AC \neq 0$ então $A \neq 0$ e $C \neq 0$, logo é possível efetuar a translação de eixos dada por $x = u - D/2A$, $y = v - E/2C$, logo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = Au^2 + Cv^2 + F'$, onde $F' = F - D^2/4A - E^2/4C$. Ora, a equação $Au^2 + Cv^2 + F' = 0$ define um ponto se $AC > 0$ e $F' = 0$, o conjunto vazio se A, C e F' tiverem o mesmo sinal, uma elipse se A e C tiverem o mesmo sinal, diferente do sinal de F' (uma circunferência se, além disso, $A = C$), um par de retas concorrentes se $AC < 0$ e $F' = 0$ ou uma hipérbole caso $AC < 0$ e $F' \neq 0$.

23.5 Este exercício é apenas um resumo das conclusões dos exercícios anteriores.

23.6 Temos $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = -2$, $E = -1$ e $F = 1$. Submeteremos os eixos a uma rotação de ângulo θ em torno da origem, com $\text{tg}\ 2\theta = B/(A - C) = -1$. Assim, $\cos 2\theta = -1/\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\theta} = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$. Segue-se que

$$\cos\theta = \sqrt{(1 + \cos 2\theta)/2} = (\sqrt{2 - \sqrt{2}})/2,$$
$$\text{sen}\ \theta = \sqrt{(1 - \cos 2\theta)/2} = (\sqrt{2 + \sqrt{2}})/2,$$

donde

$$\cos\theta\ \text{sen}\ \theta = \sqrt{2}/4,$$
$$\cos^2\theta = (2 - \sqrt{2})/4$$

e

$$\text{sen}^2\theta = (2 + \sqrt{2})/4.$$

A equação da curva nas novas coordenadas (u, v) assumem a forma $A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0$, onde

$$A' = A\cos^2\theta + B\ \text{sen}\ \theta\cos\theta + C\ \text{sen}^2\theta = 2 + \sqrt{2} = 3,414,$$
$$C' = A\ \text{sen}^2\theta - B\ \text{sen}\ \theta\cos\theta + C\cos^2\theta = 2 - \sqrt{2} = 0,586,$$
$$D' = D\cos\theta + E\ \text{sen}\ \theta = -\sqrt{2 - \sqrt{2}} - (\sqrt{2 + \sqrt{2}})/2 = -1.688,$$
$$E' = E\cos\theta - D\ \text{sen}\ \theta = -(\sqrt{2 - \sqrt{2}})/2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1,465.$$

Transladamos estes novos eixos de modo que a origem se ponha no ponto de coordenadas $(h, k) = (-D'/2A', -E'/2C') = (0,248, -1,25)$. Isto equivale a introduzir novas coordenadas (s, t), onde $u = s - D'/2A'$ e $v = t - E'/2C'$. A curva, nestas últimas coordenadas, tem uma equação da forma $A's^2 + C't^2 + F' = 0$, com $A' = 2 + \sqrt{2}$, $C' = 2 - \sqrt{2}$, como antes, e $F' = A'h^2 + D'h + C'k^2 + E'k + F = -D'^2/4A' - E'^2/4C' + F = -0,209 - 0,916 + 1 = -0,125$. Finalmente, a equação da curva é $3,414s^2 + 0,586t^2 - 0,125 = 0$. Assim, a curva dada é uma elipse.

23.7 (a) Pondo $x = u + 2$ e $y = v + 1$ a equação reduz-se a $4u^2 + 9c^2 = 36$, logo define uma elipse;

(b) Tomando $x = u - 1, y = v - 1$ a equação torna-se $2u^2 + 3v^2 = 0$, logo define σ único ponto $u = v = 0$, ou seja, $x = 1, y = 1$;

(c) Escrevendo $x = u + 3/2$, $u = v - 1$, a equação reduz-se a $u^2 + v^2 = 39/4$, logo representa uma circunferência;

(d) Substituindo $x = u - 1$, $y = v - 1/3$ na equação, obtém-se $2u^2 - 3v^2 = -13/12$, portanto ela representa uma hipérbole;

(e) As substituições $x = u - 1$, $y = v - 1/6$ levam à equação $2u^2 - 3v^2 = 0$, ou seja, $(\sqrt{2}u + \sqrt{3}v)(\sqrt{2}u - \sqrt{3}v) = 0$, a qual define o par de retas concorrentes $\sqrt{2}u + \sqrt{3}v = 0$ e $\sqrt{2}u + \sqrt{3}v = 0$.

23.8 (a) A equação $x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x - 15y + 1 = 0$ escreve-se também como $(x - 3y)^2 + 5(x - 3y) + 1 = 0$. Pondo $w = x - 3y$, e notando que o trinômio $w^2 + 5w + 1 = 0$ admite as raízes $\alpha = (5 + \sqrt{21})/2$ e $\beta = (5 - \sqrt{21})/2$, vemos que a equação dada define as retas paralelas $x - 3y = \alpha$ e $x - 3y = \beta$.

(b) Escrevendo a equação $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ como $(x - 3y)^2 + 4(x - 3y) + 4 = 0$ e pondo $w = x - 3y$, obtém-se a equação $w^2 + 4w + 4 = 0$, que possui a raiz dupla $w = -2$. Portanto a equação dada define a reta $x - 3y = 2$.

(c) No caso da equação $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y = 0$, que se escreve como $(x - 3y)^2 + (x - 3y) + 2 = 0$ ou, pondo $w = x - 3y$, $w^2 + w + 2 = 0$. Este trinômio não tem raízes reais, logo a equação inicial define o conjunto vazio.

(d) A equação $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 1 = 0$ equivale a $(x - 3y)^2 + 2(x - 3y) + 7y - 1 = 0$. A mudança de eixos por meio de uma rotação de ângulo α, onde $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$ e $\operatorname{sen}\alpha = -3/\sqrt{10}$ dá novas coordenadas $u = (x - 3y)/\sqrt{10}$ e $v = (3x + y)/\sqrt{10}$. Isto permite escrever a equação dada como $10u^2 + 2\sqrt{10} \cdot u + 7y - 1 = 0$, ou seja, $y = -10u^2/7 - 2\sqrt{10}u/7 + 1$. Como $y = (-3u + v)/\sqrt{10}$, segue-se que $-3u + v = -10\sqrt{10}u^2/7 - 20u/7 + \sqrt{10}$ e, finalmente: $v = -(10\sqrt{10}/7)u^2 + (1/7)u + \sqrt{10}$. Logo a equação dada define uma parábola. [Acima fizemos uso do fato de que $u = x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha$ e $v = -x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$ equivalem a $x = u\cos\alpha - v \operatorname{sen}\alpha$ e $y = u \operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha$.]

23.9 Para que as substituições $x = u + h, y = v + k$ eliminem os termos em u e em v na equação $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$, h e k devem ser escolhidos de modo que $18h = 18$ e $8k = -16$. Assim, as substituições a serem feitas são $x = u + 1$ e $y = v - 2$. A equação torna-se $9(u+1)^2 + 4(v-2)^2 - 18(u+1) + 16(v- = 2) - 11 = 0$. Simplificando, obtêm-se $9u^2 + 4v^2 = 48$. Portanto, a equação dada define uma elipse.

23.10 Para que as substituições $x = u + h, y = v + k$ eliminem os termos em u e v na equação $x^2+2xy+y^2+x+2y+1 = 0$, h e k devem ser escolhidos de modo que $2h+2k = -1$ e $2h+2k = -2$. Isto, porém, é impossível. [Se a equação fosse $x^2+2xy+y^2+x+y+1 = 0$, muitas translações dos eixos eliminaram os termos do primeiro grau pois o sistema linear $2h + 2k = -1$, $2h + 2k = -1$ tem uma infinidade de soluções. Uma delas, por exemplo, é $h = -1/2$, $k = 0$. A substituição $x = u - 1/2$, $y = v$ conduz à equação $u^2 + 2uv + v^2 = -1$, que define o conjunto vazio, pois $u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$ não pode ser negativo.]

23.11 (a) Se um ponto de coordenadas (x, y) cumpre a condição $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$. Portanto o conjunto definido pela equação $xy = 0$ é a reunião do eixo horizontal com o eixo vertical. Nos itens (b), (c) e (d), como os coeficientes de x^2 e de y^2 são iguais, a rotação de 45^0 no sistema de eixos introduz novas coordenadas u, v, onde $x = (u-v)/\sqrt{2}$, $y = (u+v)/\sqrt{2}$, em relação às quais as equações assumem as formas simplificadas seguintes: (b) $u^2 + 2v^2 = 16$ (elipse); (c) $9u^2 - v^2 = -2$ (hipérbole); (d) $3u^2 + v^2 = -2$ (o conjunto vazio).

23.12 (a) O termo em uv é eliminado mediante uma rotação de ângulo θ nos eixos, em torno da origem, com $\operatorname{tg} 2\theta = B/(A-C) = 1/2$. Escolhendo 2θ no primeiro ou segundo quadrante, de modo que $\operatorname{tg} 2\theta = 1/2$, tem-se $\cos 2\theta = 1/\sqrt{1+(1/2)^2} = 2/\sqrt{5}$. Segue-se que $\cos\theta = \sqrt{(1+2/\sqrt{5})/2} = \sqrt{1/2+\sqrt{5}/5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{(1-2/\sqrt{5})/2} = \sqrt{1/2-\sqrt{5}/5}$. Chamando de x e y as novas coordenadas, a equação

$u^2 + uv - v^2 - 2 = 0$ assume a forma $Gx^2 + Jy^2 = 2$, com

$$\begin{aligned} G &= \cos^2\theta + \cos\theta \text{ sen } \theta - \text{ sen }^2\theta \\ &= 1/2 + \sqrt{5}/5 + \sqrt{5}/10 - 1/2 + \sqrt{5}/5 = \sqrt{5}/2 \end{aligned}$$

e

$$J = \text{ sen }^2\theta - \cos\theta \text{ sen } \theta - \cos^2\theta = \sqrt{5}/2.$$

Portanto a equação da curva nas coordenadas x, y é

$$(\sqrt{5}/2)x^2 - (\sqrt{5}/2)y^2 = 2.$$

Trata-se de uma hipérbole.

(b) Dada a equação $9u^2 + 20v^2 - \sqrt{3}uv - 4 = 0$, efetua-se sobre os eixos uma rotação de ângulo θ em torno da origem, a fim de eliminar o termo em uv. Pode-se tomar 2θ no primeiro ou no segundo quadrante, de modo de θ pertença ao primeiro quadrante. Então

$$\cos 2\theta = 1/\sqrt{1 + \text{ tg }^2 2\theta} = 11\sqrt{31}/62.$$

Daí

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= (1 + \cos 2\theta)/2 = 1/2 + 11\sqrt{31}/124 = 0,994, \\ \cos\theta &= \sqrt{0,994} = 0,997, \\ \text{sen }^2\theta &= (1 - \cos 2\theta)/2 = 1/2 - 11\sqrt{31}/124 = 0,006, \\ \text{sen } \theta &= \sqrt{0,006} = 0.078, \\ \cos\theta \text{ sen } \theta &= 0,0777. \end{aligned}$$

Nas novas coordenadas (x, y) a equação assume a forma $A'x^2 + C'y^2 = 4$ onde

$$\begin{aligned} A' &= 9\cos^2 - \sqrt{3}\cos\theta \text{ sen } \theta + 20 \text{ sen }^2\theta = 8,932e \\ C' &= 9 \text{ sen }^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta \text{ sen } \theta + 20\cos^2\theta = 20,068. \end{aligned}$$

Assim, a nova equação da curva é $9,932x^2 + 20,068y^2 = 4$. Trata-se de uma elipse. (Para verificar se os cálculos foram feitos corretamente, constata-se que $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Tem-se $B^2 - 4AC =$

-717 e $-4A'C' = -716,989$. Tudo bem.) Os novos eixos coordenados, em relação aos quais a equação originalmente dada assume a forma $8,932x^2 + 20,068y^2 = 4$ são as retas que passam pela origem e contêm os vetores unitários $f_1 = (\cos\theta, \text{ sen } \theta) = (0,997;\ 0,78)$ e $f_2 = (-\text{ sen } \theta, \cos\theta) = (-0,078;\ 0,997)$.

23.13 Mediante uma rotação de ângulo θ em torno de origem, a equação dada assume a forma $A'u^2+B'uv+C'v^2+D'u+E'v+F=0$, onde $A' = Au^2 + Bab + Cb^2$ e $C' = Ab^2 - Bab + Ca^2$, onde $a = \cos\theta$ e $b = \text{ sen } \theta$. Como $a^2 + b^2 = 1$, segue-se que $A' + B' = A + C$. Se a mudança de eixos for uma translação, os coeficientes A, B e C não mudam. E se envolver inversão de orientação, a mudança de eixos consiste numa rotação seguida de translação e depois numa troca de sinal de uma das coordenadas.

Esta última mantém A e C, que são coeficientes de x^2 e y^2 respectivamente, pois $x^2 = (-x)^2$ e $y^2 = (-y)^2$.

23.14 (a) O discriminante da equação $\lambda^2 - m\lambda + n = 0$ é $m^2 - 4n = A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + B^2 = A^2 - 2AC + C^2 + B^2 = (A-C)^2 + B^2$, logo não é negativo. As raízes são $\lambda_1 = [A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}]/2$ e $\lambda_2 = [A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}]/2$.

(b) A soma $(A-C)^2 + B^2$ só é zero quando $A = C$ e $B = 0$.

(c) O sistema proposto pode escrever-se como

$$(A - \lambda_1)x + (B/2)y = 0,$$

$$(B/2)x + (C - \lambda_1)y = 0.$$

Seu determinante é $(A - \lambda_1)(C - \lambda_1) - B^2/4 = \lambda^2{}_1 - (A + C)\lambda_1 + AC - B^2/4 = \lambda_1^2 - m\lambda_1 + n = 0$, logo ele é indeterminado. Se (x, y) é uma solução deste sistema então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}, (\alpha x, \alpha y)$ também é solução. Partindo de uma solução não nula (x_0, y_0), obtém-se numa solução (a, b), com $a = x_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $b = y_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, tal que $a^2 + b^2 = 1$. Pondo $f_1 = (a, b)$, o vetor f é unitário e $Aa + (B/2)b = \lambda_1 a, (B/2)a + Cb = \lambda_1 \cdot b$.

(d) Como $\lambda_2 = A + C - \lambda_1$, podemos escrever $\lambda_2 b = Ab + Cb - \lambda_1 b =$

$Ab + Cb - (B/2)a - Cb = Ab - (B/2)a$. Portanto $A(-b) + (B/2)a = \lambda_2(-b)$. Do mesmo modo se mostra que $(B/2)(-b) + Ca = \lambda_2 a$.

(e) Sejam OX_1 e OY_1 os eixos ortogonais cujos vetores unitários são f_1 e f_2 respectivamente. Se um ponto tem coordenadas (x, y) no sistema original, suas coordenadas (u, v) no sistema OX_1Y_1 são tais que $x = au - bv$, $y = bu + av$. Fazendo estas substituições na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ obtém-se $A'u^2 + B'uv + C'v^2 + F = 0$, onde

$$\begin{aligned}
A' &= Aa^2 + Bab + Cb^2 \\
&= a\left(Aa + \frac{B}{2}b\right) + b\left(\frac{B}{a}a + Cb\right) \\
&= \lambda_1 a^2 + \lambda_1 b^2 = \lambda_1 \\
B' &= -2Aab + B(a^2 - b^2) + 2Cab \\
&= -2b\left(Aa + \frac{B}{2}b\right) + 2a\left(\frac{B}{2}a + Cb\right) \\
&= -2ab\lambda_1 + 2ab\lambda_1 = 0 \\
C' &= Ab^2 - Bab + Ca^2 \\
&= b\left(Ab - \frac{B}{2}A\right) + a\left(-\frac{B}{2}b + Ca\right) \\
&= \lambda_2 b^2 + \lambda_2 a^2 = \lambda_2.
\end{aligned}$$

Portanto a equação nas coordenadas (u, v) assume a forma $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + F = 0$.

(f) O exercício 23.12 tem duas partes, nas quais são dadas as equações $u^2 + uv - v^2 - 2 = 0$ e $9u^2 + 20v^2 - \sqrt{3}uv - 4 = 0$ para que se eliminem os termos em uv. No primeiro caso, temos $m = 0$, $n = -1 - 1/4 = -5/4$ e a equação $\lambda^2 - m\lambda + n = 0$ reduz-se a $\lambda^2 = 5/4$, cujas raízes são $\lambda_1 - \sqrt{5}/2$ e $\lambda_2 = -\sqrt{5}/2$. A curva, em coordenadas x, y, é $(\sqrt{5}/2)x^2 - (\sqrt{5}/2)y^2 = 2$.

Na segunda parte, temos $m = 29$ e $n = 717/4$. A equação $\lambda^2 - m\lambda + n = 0$ assume a forma $\lambda^2 - 29\lambda + 717/4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1(29 + 2\sqrt{31})/2 = 20,068$ e $\lambda_2 = (29 - 2\sqrt{31})/2 = 8,932$. A curva, nas coordenadas x, y escreve-se como $20,068x^2 + 8,932y^2 = 4$.

Soluções dos Exercícios da Terceira Parte

25.1 Dados P, Q quaisquer em Π, tem-se

$$\begin{aligned} d((S \circ T)(P), (S \circ T)(Q)) &= d(S(T(P)), S(T(Q))) \\ &= d(T(P), T(Q)) = d(P, Q). \end{aligned}$$

Além disso, dados P_1, Q_1 em Π, existem P, Q em Π tais que $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$. Então $T^{-1}(P_1) = P$ e $T^{-1}(Q_1) = Q$, logo $d(T^{-1}(P_1), T^{-1}(Q_1)) = d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = d(P_1, Q_1)$. Portanto $S \circ T$ e T^{-1} são isometrias.

25.2 Consideremos a translação $T_v \colon \Pi \to \Pi$. Dados arbitrariamente os pontos P, Q em Π, sejam $T_v(P) = P_1$ e $T_v(Q) = Q_1$. Então $\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{QQ_1} = v$. Ora, é claro que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}$. Cancelando $\overrightarrow{QQ_1}$ e $\overrightarrow{PP_1}$ vem $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$. Portanto $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{P_1Q_1}|$, isto é, $d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$.

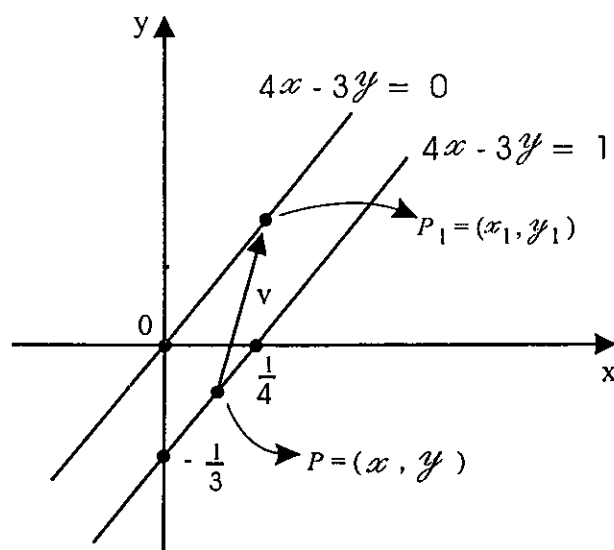



Figura 25.3

25.3 Se $v = (2,3)$, a translação T_v leva o ponto de coordenadas (x,y) no ponto de coordenadas (x_1, y_1), onde $x_1 = x + 2$ e $y_1 = y + 3$, portanto $x = x_1 - 2$ e $y = y_1 - 3$. Os pontos (x,y) que cumprem a condição $4x - 3y = 1$ são portanto transformados em pontos (x_1, y_1) tais que $4(x_1 - 2) - 3(y_1 - 3) = 1$, isto é, $4x_1 - 3y_1 = 0$. Assim, a reta $4x - 3y = 1$ é transformada pela translação T_v na sua paralela que passa pela origem.

25.4 Se $v = (\alpha, \beta)$, a translação T_v leva o ponto de coordenadas (x,y) no ponto de coordenadas (x_1, y_1), onde $x_1 = x + \alpha$ e $y_1 = y + \beta$, portanto $x = x_1 - \alpha$, $y = y_1 - \beta$. Assim, os pontos (x,y) tais que $ax + by = c$ são levados por T_v em pontos (x_1, y_1) que cumprem a condição $a(a_1 - \alpha) + b(y_1 - \beta) = c$, ou seja, $ax_1 + by_1 = c + a\alpha + b\beta$. Portanto, a translação T_v leva a reta $ax + by = c$ na sua paralela que é a linha de nível $c + a\alpha + b\beta$, da mesma função $\varphi(x,y) = ax + by$, da qual a reta original é a linha de nível c

25.5 Para todo ponto P do plano,tem-se

$$
\begin{aligned}
(T_u \circ T_v)(P) &= T_u(T_v(P)) \\
&= T_u(P + v) = (P + v) + u \\
&= P + (u + v) = T_u + v(P).
\end{aligned}
$$

Além disso, se 0 é o vetor nulo então $T_0(P) = P$ para todo ponto P do plano. Portanto, em virtude do que vimos acima:

$$T_{-u}(T_v(P)) = T_{-v+v}(P) = T_0(P) = P.$$

Logo $T_{-v} = (T_v)^{-1}$.

25.6 Se $v = (b/2a, (b^2 - 4ac)/4a)$ então a translação T_v leva o ponto de coordenadas (x,y) no ponto de coordenadas (x_1, y_1) onde $x_1 = x + b/2a$ e $y_1 = y + (b^2 - 4ac)/4a$, logo $x = x_1 - b/2a$ e $y = y_1 + (4ac - b^2)/4a$. Assim, os pontos (x,y) que cumprem a condição $y = ax^2 + bx + c$ são levados por T_v nos pontos (x_1, y_1) tais que $y_1 + (4ac - b^2)/4a = a(x_1 - b/2a)^2 + b(x_1 - b/2a) + c$. Simplificando, vem $y_1 = ax_1^2$

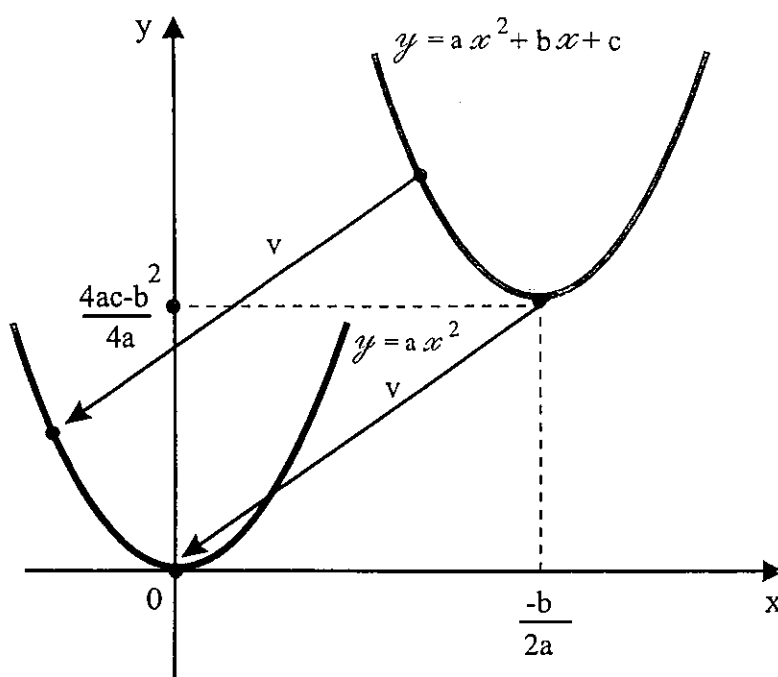



Figura 25.6

25.7 (a) R é a rotação de 90^0 em torno de O, no sentido positivo ; S é a rotação de 45^0 em torno de O, no sentido positivo, T é a translação de vetor $v = (1, -1)$.

(b) R e S transformam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ em si mesma e T a transforma na circunferência de raio 1 e centro no ponto $(1, -1)$, cuja equação é $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

(c) R, S e T transformam a reta $y = x$ nas retas $y = -x, x = 0$ e $y = x - 2$ respectivamente.

(d) Para todo ponto $P = (x, y)$ tem-se:

$$\begin{aligned}(R \circ S)(P) &= R(S(P)) \\ &= R((x-y)/\sqrt{2}, (x+y)/\sqrt{2}) \\ &= ((-x-y)/\sqrt{2}, (x-y)/\sqrt{2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S \circ R)(P) &= S(R(P)) \\ &= S(-y, x) = ((-x-y)/\sqrt{2}, (x-y)/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Logo $S \circ R = R \circ S$. Por outro lado,

$$(R \circ T)(P) = R(T(P)) = R(x+1, y-1) = (1-y, x+1),$$
$$(T \circ R)(P) = T(R(P)) = T(-y, x) = (1-y, x-1).$$

Portanto $(R{\circ}T)(P) \neq (T{\circ}R)(P)$ para todo ponto P de plano. Observe que bastava ser $(R \circ T)(P) \neq (T \circ R)(P)$ para um único ponto P a fim de concluirmos que $R \circ T \neq T \circ R$. Finalmente,

$$\begin{aligned}(S \circ T)(P) &= S(T(P)) \\ &= S(x+1, y-1) \\ &= ((x-y+2)/\sqrt{2}, (x+y)/\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T \circ S)(P) &= T(S(P)) \\ &= T((x-y)/\sqrt{2}, (x+y)/\sqrt{2}) \\ &= ((x-y+\sqrt{2})/\sqrt{2}, (x+y-\sqrt{2})/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Novamente, tem-se $(S \circ T(P) \neq (T \circ S)(P)$ para todo ponto P do plano.

25.8 As equações de uma isometria T (digamos, que preserve orientação e) que leve a reta $y = 2x + 1$ no eixo horizontal são da forma $T(x, y) = (x_1, y_1)$, com $x_1 = x\cos\alpha - y \text{ sen } \alpha + a$, $y_1 = x \text{ sen } \alpha + y\cos\alpha + b$. Podemos requerer que T deixe fixo o ponto $(-1/2, 0)$, já que ele é a interseção da reta dada com o eixo horizontal. Isto nos permite escrever $-1/2 = -(1/2)\cos\alpha + a$ e $0 = -(1/2) \text{ sen } \alpha + b$, ou seja, $\cos\alpha = 1 + 2a$, $\text{sen } \alpha = 2b$. Podemos também impor que T leve o ponto $(0, 1)$, interseção da reta $y = 2x + 1$ com o eixo horizontal, no ponto $((\sqrt{5} - 1)/2, 0)$ porque a distância entre os pontos $(-1/2, 0)$ e $(0, 1)$ é igual à distância entre os pontos $(-1/2, 0)$ e $((\sqrt{5} - 1)/2, 0)$. Então temos $(\sqrt{5} - 1)/2 = -\text{ sen } \alpha + a$ e $0 = \cos\alpha + b$. Noutras palavras, $2 \text{ sen } \alpha = 2a + 1 - \sqrt{5}$ e $\cos\alpha = -b$. Combinando estas duas equações com as equações $\cos\alpha = 1 + 2a$, $\text{sen } \alpha = 2b$, já encontradas, obtemos $a = (7 + \sqrt{5})/10, b = \sqrt{5}/5, \cos\alpha = (12 + \sqrt{5})/5$ e $\text{sen } \alpha = 2\sqrt{5}/5$. Entrando com estes valores nas fórmulas $x_1 = x\cos\alpha - y \text{ sen } \alpha$ e $y_1 = x \text{ sen } \alpha + y\cos\alpha$, tem-se a resposta procurada.

25.9 A isometria T leva o ponto (x, y) no ponto (x_1, y_1), onde $x_1 = x\cos\alpha - y \text{ sen } \alpha + a, y_1 = x \text{ sen } \alpha + y\cos\alpha + b$. Então

$$\begin{aligned}(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= (x\cos\alpha - y \text{ sen } \alpha)^2 + (x \text{ sen } \alpha + y\cos\alpha)^2 \\ &= x^2\cos^2\alpha + y^2 \text{ sen }^2\alpha - 2xy\cos\alpha \text{ sen } \alpha + \\ &\quad + x^2 \text{ sen } \alpha + y^2\cos^2\alpha + 2xy \text{ sen } \alpha\cos\alpha \\ &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

Portanto, tem-se $x^2+y^2 = r^2$ se, e somente se, $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2 = r^2$. Isto significa que a isometria T que leva $(0, 0)$ em (a, b) transforma a circunferência de centro na origem e raio r na circunferência de mesmo raio r e centro no ponto (a, b).

26.1 Sejam S e T respectivamente as simetrias em torno dos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$. Para todo ponto $P = (x, y)$ tem-se

$$\begin{aligned}T(S(P)) &= T(2a - x, 2b - y) = (2c - (2a - x), 2d - (2b - y)) \\ &= (2(c - a) + x, 2(d - b) + y) = T_v(x, y),\end{aligned}$$

onde $v = 2\overrightarrow{AB} = (2(c - a), 2(d - b))$.

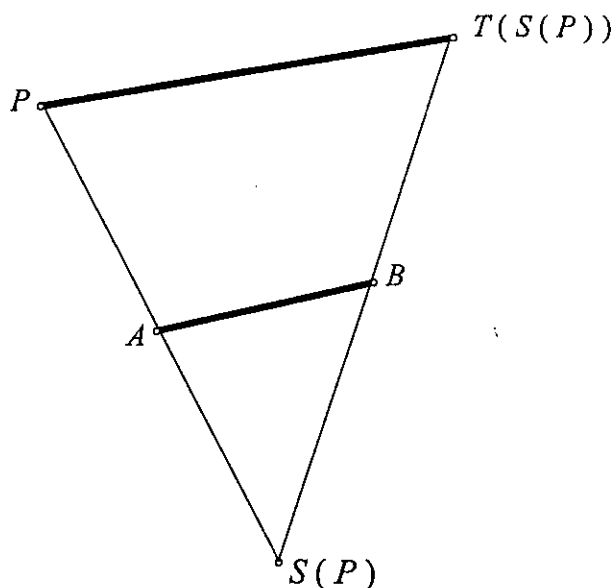



Figura 26.1

26.2 Sejam R e S respectivamente as rotações de ângulo α e β, em torno do mesmo ponto $A = (a, b)$. Se $P = (x, y)$ então $R(P) = (x_1, y_1)$ onde

$$\begin{aligned} x_1 &= (x-a)\cos\alpha - (y-b) \text{ sen } \beta + a \\ y_1 &= (x-a) \text{ sen } \alpha + (y-b)\cos\beta + b. \end{aligned}$$

Por sua vez, $S(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ onde

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_1-a)\cos\beta - (y_1-b) \text{ sen } \beta + a \\ y_2 &= (x_1-a) \text{ sen } \beta - (y_1-b)\cos\beta + b. \end{aligned}$$

Substituindo x_1 e y_1 por seus valores acima, vem

$$\begin{aligned} x_2 = {} & [(x-a)\cos\alpha - (y-b) \text{ sen } \alpha]\cos\beta - \\ & - [(x-a) \text{ sen } \alpha + (y-b)\cos\alpha] \text{ sen } \beta + a = \\ = {} & (x-a)(\cos\alpha\cos\beta - \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta) - \\ & - (y-b)(\text{ sen } \alpha\cos\beta + \cos\alpha \text{ sen } \beta) + a = \\ = {} & (x-a)\cos(\alpha+\beta) - (y-b) \text{ sen } (\alpha+\beta) + a \end{aligned}$$

Analogamente, $y_2 = (x-a) \text{ sen } (\alpha+\beta) + (y-b)\cos(\alpha+\beta) + b$. Isto significa que $S \circ T$ é a rotação de ângulo $\alpha + \beta$ em torno do ponto A. O mesmo argumeto mostra que $T \circ S$ também é a rotação de ângulo $\alpha + \beta$ em torno de A.

26.3 Sejam A o centro da rotação R e B o centro da rotação S, com $A \neq B$. Então $(R \circ S)(B) = R(S(B)) = R(B)$, enquanto $(S \circ R)(B) = S(R(B))$. Como $B \neq A$ e R não é a transformação identidade, tem-se $R(B) \neq B$. Como o único ponto fixo de S é B, resulta daí que $S(R(B)) \neq R(B)$, portanto $R \circ S \neq S \circ R$.

26.4 Tem-se $(u, v) = S(ax - by, bx + ay)$, logo $u = c(ax - by) - d(bx + ay)$ e $v = d(ax - by) + c(bx + ay)$. Assim, $u = (ac - bd)x - (ad + bc)y$ e $v = (ad + bc)x + (ac - bd)y$. [Daí resulta que o produto de duas matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ainda é da mesma forma e independe da ordem dos fatores.]

26.5 Isto já foi feito no exercício 26.2 acima.

26.6 Sejam R e S respectivamente as rotações de centros $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e ângulos α, β. Então, se $R(x, y) = (x_1, y_1)$ e $S(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= (x-a)\cos\alpha - (y-b)\text{ sen }\alpha + a, \\ y_1 &= (x-a)\text{ sen }\alpha + (y-b)\cos\alpha + b, \\ x_2 &= (x_1-c)\cos\beta - (y_1-d)\text{ sen }\beta + c, \\ y_2 &= (x_1-c)\text{ sen }\beta + (y_1-d)\cos\beta + d. \end{aligned}$$

Substituindo x_1 e y_1 nas duas últimas equações por seus valores dados nas duas primeiras, vem:

$$\begin{aligned} x_2 = {} & (x-a)\cos(\alpha+\beta) - (y-b)\text{ sen }(\alpha+\beta) + \\ & + (a-c)\cos\beta - (b-d)\text{ sen }\beta + c \\ y_2 = {} & (x-a)\text{ sen }(\alpha+\beta) + (y-b)\cos(\alpha+\beta) + \\ & + (a-c)\text{ sen }\beta + (b-d)\cos\beta + d. \end{aligned}$$

Isto mostra que a composta $S \circ R$ consiste numa rotação de centro A e ângulo $\alpha + \beta$ seguida de uma translação. Como se sabe (págs. 144 e 145 do texto), se $\alpha + \beta = 0$ ou $\alpha + \beta = 360^0$, então $S \circ R$ é uma rotação de ângulo $\alpha + \beta$ com centro noutro ponto. (Na pág. 145 está o sistema de equações que deve ser resolvido para obter as coordenadas desse centro.) Caso seja $\alpha + \beta = 0^0$ ou $\alpha + \beta = 360^0$, as fórmulas que acabamos de obter mostram que $S \circ R$ é uma translação.

26.7 A rotação de 45^0 em torno da origem leva o ponto de coordenadas (x, y) no ponto de coordenadas (x_1, y_1), onde $x_1 = (x-y)/\sqrt{2}$ e $y_1 = (x+y)/\sqrt{2}$. Daí decorre que $x = (x_1+y_1)/\sqrt{2}$ e $y = (y_1-x_1)/\sqrt{2}$. Portanto, os pontos (x, y) cujas coordenadas cumprem a condição $ax^2 + 2bxy + ay^2 = c$ são transformados por essa rotação em pontos (x_1, y_1) cujas coordenadas cumprem a condição

$$a[(x_1 + y_1)/\sqrt{2}]^2 + 2b[(x_1 + y_1)/\sqrt{2}][(y_1 - x_1)/\sqrt{2}] +$$

$$+ a[(y_1 - x_1)/\sqrt{2}]^2 = c.$$

Simplificando, vem: $(a-b)x_1^2 + (a+b)y_1^2 = c$. Se $c \neq 0$, estes pontos constituem uma elipse ou uma hipérbole, conforme $a+b$ e $a-b$ tenham ou não o mesmo sinal. Evidentemente, se $b \neq 0$ não pode ter $a + b = a - b$. Portanto, a elipse $ax^2 + 2bxy + ay^2 = c$ se reduz a uma circunferência apenas quando $b = 0$.

26.8 Tomamos um ponto A do plano e seja A_1 sua imagem por essa transformação T. Seja O o ponto médio do segmento AA_1. Afirmamos que $T(O) = O$. (Caso fosse $A_1 = A$, tomaríamos $O = A$.) Com efeito, se $O_1 = T(O)$, os segmentos orientados AO e O_1A_1 são equipolentes e três de seus extremos (A, O e A_1) estão sobre a reta AA_1 logo O_1 também está sobre esta reta. Como $d(A,O) = d(O,A_1)$, a equipolência $AP \equiv O_1A_1$, mostra que $O = O_1$. Portanto $T(O) = O$. Então, para todo ponto P do plano, os segmentos PO e OP_1 são equipolentes, logo $P_1 = T(P)$ é o simétrico de P relativamente a O. Assim, T é a simetria em torno do ponto O.

27.1 A igualdade $T = T^{-1}$ equivale a $T \circ T = Id$ e esta última significa que o simétrico do simétrico de um ponto P em relação à reta r é o próprio P, o que é evidente.

27.2 Como S e T invertem orientação, $S \circ T$ preserva, logo não é reflexão.

27.3 Considere um sistema de eixos ortogonais no qual r seja o eixo horizontal e a equação da reta s seja $x = a$. Então $R(x,y) = (x,-y)$ e $S(x,y) = (x, 2a-y)$. Segue-se que $(S \circ R)(x,y) = S(x,-y) = (x, 2a+y) = T_v(x,y)$ onde $v = (0,2a)$ é o vetor perpendicular a r e s, com origem num ponto de r e extremidade num ponto de s. [Analogamente se vê que $R \circ S = T_{-v}$.]

27.4 Considere um sistema de eixos ortogonais no qual r seja o eixo horizontal e a origem seja o ponto de interseção de r e s. Dado um ponto arbitrário $P = (x,y)$ no plano, as equações (1) da seção 27 dizem que $S(x,y) = (x \cos 2\alpha + y \text{ sen } 2\alpha, x \text{ sen } 2\alpha - y \cos 2\alpha)$. Além

disso, sabemos que $R(x,y) = (x,-y)$. Portanto

$$\begin{aligned}(S \circ R)(x,y) &= S(x,-y)\\ &= (x\cos 2\alpha - y \text{ sen } 2\alpha, x \text{ sen } 2\alpha + y\cos 2\alpha).\end{aligned}$$

As primeiras equações da pág. 143 mostram que $S \circ R$ é a rotação de ângulo 2α em torno do ponto de interseção de r e s. Além disso, sendo R e S reflexões, tem-se $R^{-1} = R$ e $S^{-1} = S$. Em geral, para transformações invertíveis quaisquer, vale $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. Então, neste caso particular tem-se $(S \circ R)^{-1} = R \circ S$. Portanto $R \circ S$ é a inversa da rotação de centro O e ângulo 2α, ou seja, é a rotação de centro O e ângulo -2α.

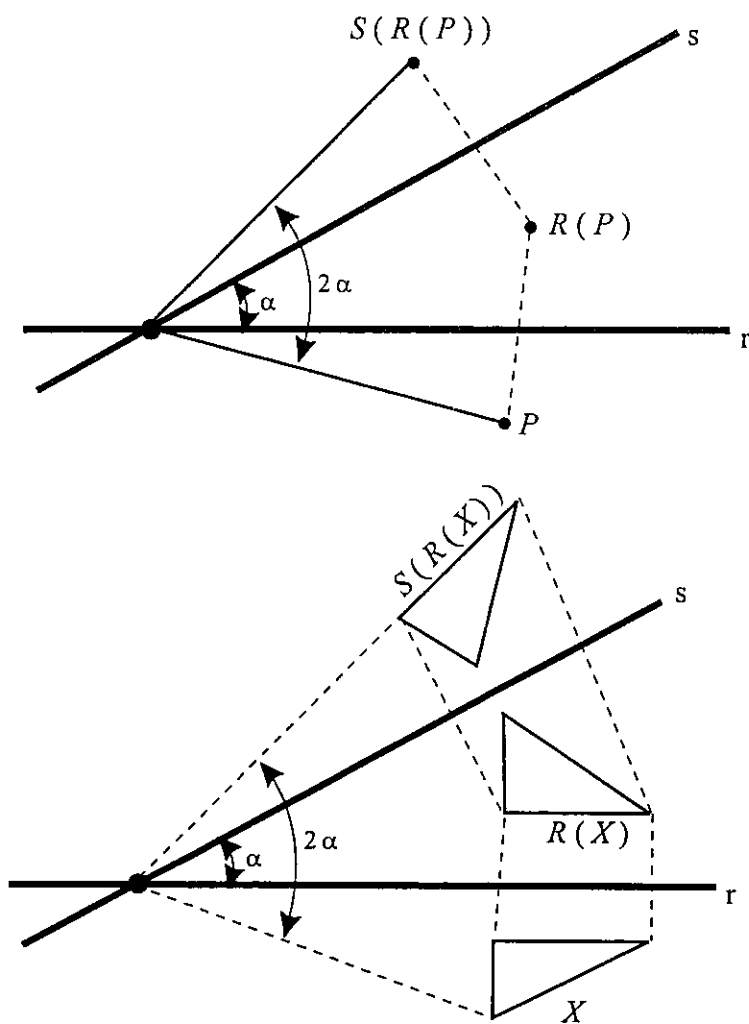



Figura 27.4

Observação. Sejam r e s retas que se intersectam no ponto O. O menor número positivo α tal que a rotação de ângulo α e centro O leva r em s chama-se *ângulo da reta r para reta s*. Tem-se $0 < \alpha < 180^0$. Neste caso, o ângulo da reta s para a reta r é $180^0 - \alpha$.

Por outro lado, quando se fala na *rotação* de ângulo α em torno do ponto O, em princípio, α pode ser qualquer número positivo, negativo ou zero; noutras palavras, o ângulo de uma rotação é tomado no sentido trigonométrico, bem de acordo com as fórmulas $x_1 = (x-a)\cos\alpha-(y-b)$ sen $\alpha+a$, $y_1 = (x-a)$ sen $\alpha+(y-b)\cos\alpha+b$, que exprimem as coordenadas (x_1, y_1) da imagem do ponto (x, y) pela rotação de ângulo α em torno do ponto $A = (a, b)$. Entretanto, como a rotação de ângulo α e centro no ponto A coincide com a rotação de ângulo $\alpha + k\cdot 360^0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, podemos, sempre que for conveniente, supor que $0 \leq \alpha \leq 360^0$.

No exercício 27.4, o ângulo de s para r é $180^0 - \alpha$, cujo dobro é $360^0 - 2\alpha$. Como uma rotação de ângulo $360^0 - 2\alpha$ é o mesmo que uma rotação de mesmo centro e ângulo -2α, vemos que a conclusão do exercício seria análoga se trocássemos os papéis de r e s.

27.5 Como está na pág. 154, as isometrias do plano são de quatro tipos: (1) Rotação; (2) Translações; (3) Reflexões; (4) Reflexões com deslizamento. Dada uma rotação de centro O e ângulo α, tomem-se duas retas r e s que se cortam no ponto O e formam um ângulo de $|\alpha/2|$. A rotação dada é composta das duas reflexões em torno dessas retas *. Dada uma translação T_v, tomem-se duas retas paralelas r, s a uma distância igual à metade do comprimento de v. Então T_v é a composta das reflexões em torno dessas retas. Finalmente, uma reflexão com deslizamento sendo a composta de uma reflexão com uma translação, é, pelo que acabamos de ver, a composta de três reflexões.

27.6 Considere um sistema de eixos no qual o eixo horizontal coincide com o eixo de reflexão. Então o vetor de deslizamento tem a forma

* Mais precisamente, se T é rotação de ângulo α e R, S são reflexões de eixos r e s respectivamente e o ângulo de r para s é $|\alpha/2|$ então $T = R \circ S$ ou $T = S \circ R$ conforme $\alpha < 0$ ou $\alpha > 0$.

$v = (a, 0)$ e, para todo ponto $P = (x, y)$, tem-se $P_1 = R(x, y) = (x + a, -y)$. O ponto médio do segmento de reta liga PP_1 tem coordenadas $((2x+a)/2, (-y+y)/2) = (x+a/2, 0)$, logo pertence ao eixo horizontal.

27.7 Se T é uma rotação então, para todo ponto P com $P \neq P_1$, $P_1 = T(P)$, a mediatriz do segmento PP_1 passa pelo centro de rotação, pois este centro é equidistante de P e P_1. Se T é uma translação então todos os segmentos PP_1 são equipolentes logo suas medietrizes são paralelas umas às outras. Se T é uma reflexão então os segmentos PP_1 são todos perpendiculares ao eixo r, logo suas medietrizes são paralelas.

27.8 Segue-se do exercício 27.4 que uma isometria $R \circ S$ e $S \circ R$ é a rotação de $+90^0$ em torno de O e a outra rotação de -90^0 em torno de O. Consequentemente, para todo P, os pontos $R(S(P))$ e $S(R(P))$ são simétricos em relação a O.

27.9 Se as retas r e s forem concorrentes e formarem um ângulo α, sabemos que $R \circ S$ e $S \circ R$ são as rotações de ângulos 2α e -2α em torno do seu ponto de encontro. Para que essas rotações coincidam deve-se ter $\alpha = 90^0$. Se as retas r e s forem paralelas e v é o vetor perpendicular a ambas, com origem numa delas e extremidade na outra, então $R \circ S$ e $S \circ R$ são as translações T_v e T_{-v}, as quais não coincidem. Portanto, se $R \circ S = S \circ R$, além da possibilidade de r ser perpendicular a s, só resta a hipótese de $r = s$.

27.10 Tomando um sistema de eixos no qual r é o eixo horizontal, seja $v = (a, +0)$. Então

$$R(x, y) = (x, -y) \quad \text{e} \quad T(x, y) = (x + a, y).$$

Portanto

$$R(T(x, y)) = R(x + a, y) = (x + a, -y)$$

e

$$T(R(x, y)) = T(x, -y) = (x + a, -y).$$

Logo $R \circ T = T \circ R$.

27.11 Considere um sistema de eixos tal que R seja a reflexão com vetor de deslizamento $v = (a, 0)$, em torno do eixo horizontal. Escrevendo $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R$, etc, vê-se que $R^n(x, y) = (x + na, (-1)^n y)$. Portanto, quando n é par, R^n é a translação de vetor nv e, se n é impar, R^n é a reflexão com deslizamento em torno do eixo horizontal, com vetor de deslizamento nv.

27.12 Se os triângulos congruentes ABC e $A_1B_1C_1$ têm orientações opostas no plano Π, uma congruência $T\colon \Pi \to \Pi$ com $T(A) = A_1$, $T(B) = B_1$ e $T(C) = C_1$ deve ser uma reflexão com deslizamento ou uma reflexão (que consideraremos como caso particular, correspondendo a um vetor de deslizamento igual a zero). Sabe-se do exercício 27.6 que, para todo ponto P do plano, com $P_1 = T(P)$, o ponto médio do segmento PP_1 pertence ao eixo da reflexão. Segue-se daí que os pontos médios dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 estão sobre a mesma reta r, a qual é o eixo da reflexão. Além disso, se A' e A_1' são, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de A e A_1 sobre r então o vetor $v = \overrightarrow{A'A_1'}$ é o vetor de deslizamento. (Se $v = 0$ então T é uma simples reflexão em torno da reta r.)

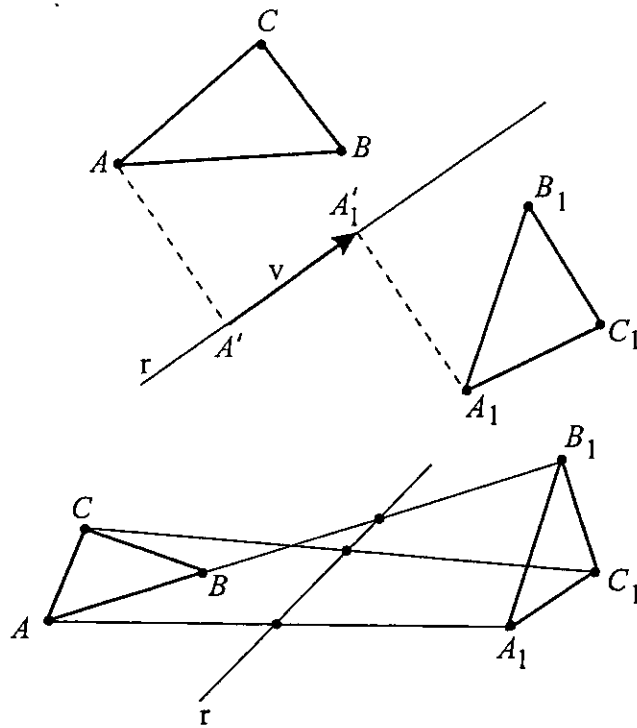



Figura 27.12

Observação. É um fato geométrico, em si interessante, que se ABC e $A_1B_1C_1$ são triângulos congruentes com orientações opostas então os pontos médios dos segmentos AA_1, BB_1 e CC_1 estão em linha reta. (Em todo o exercício e nesta observação, está-se implicitamente admitindo que A_1B_1 e C_1 são, nesta ordem, os homólogos de A, B e C.)

27.13 Considere A_1, simétrico de A em relação a r. O ponto X procurado é a interseção das retas A_1B e r. Com efeito, para qualquer outro ponto Y em r, os pontos A_1Y e B não são colineares, logo

$$\begin{aligned} d(A_1,Y) + d(Y,B) > d(A_1,B) &= d(A_1,X) + d(X,B) \\ &= d(A,X) + d(X,B). \end{aligned}$$

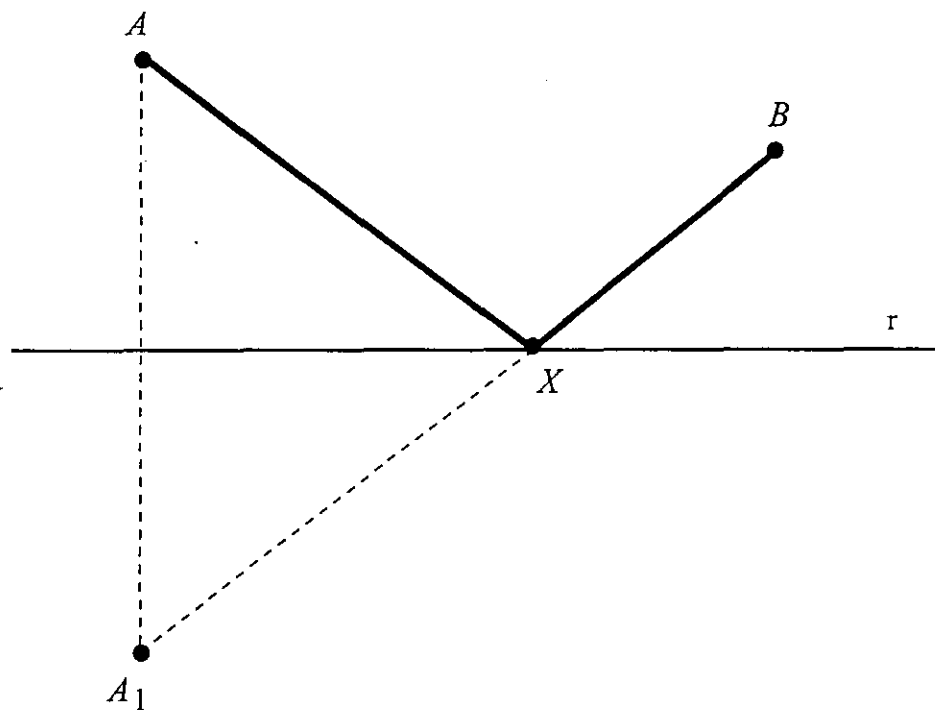



Figura 27.13

27.14 Considere o ponto A_1, simétrico de A em relação a r. O ponto Y procurado é a interseção das retas A_1B e r. Com efeito, como $AY = A_1Y$, temos $d(A,Y) - d(B,Y) = d(A_1,Y) - d(B,Y) = d(A_1,B)$ enquanto que, para qualquer outro ponto Z sobre a reta $r, d(A,Z) -$

$d(B,Z) = d(A_1,Z) - d(B,Z) < d(A_1,B)$ porque, no triângulo A_1BZ, o lado A_1B é maior do que a diferença dos outros dois. Evidentemente, pode ocorrer que as retas A, B e r sejam paralelas. Neste caso, a solução acima indicada não funciona, e nenhuma outra tampouco. Com efeito, se A e B estão em lados opostos e à mesma distância de r então $d(A,Y)-d(B,Y) = d(A_1,Y)-d(B,Y) < d(A_1,B)$, seja qual for o ponto Y em r. À medida que Y se afasta ao longo de r, na direção de A_1 para B, a diferença $d(A_1,Y) - d(B,Y)$ cresce, aproximando-se do limite $d(A_1,B)$, o qual nunca é atingido.

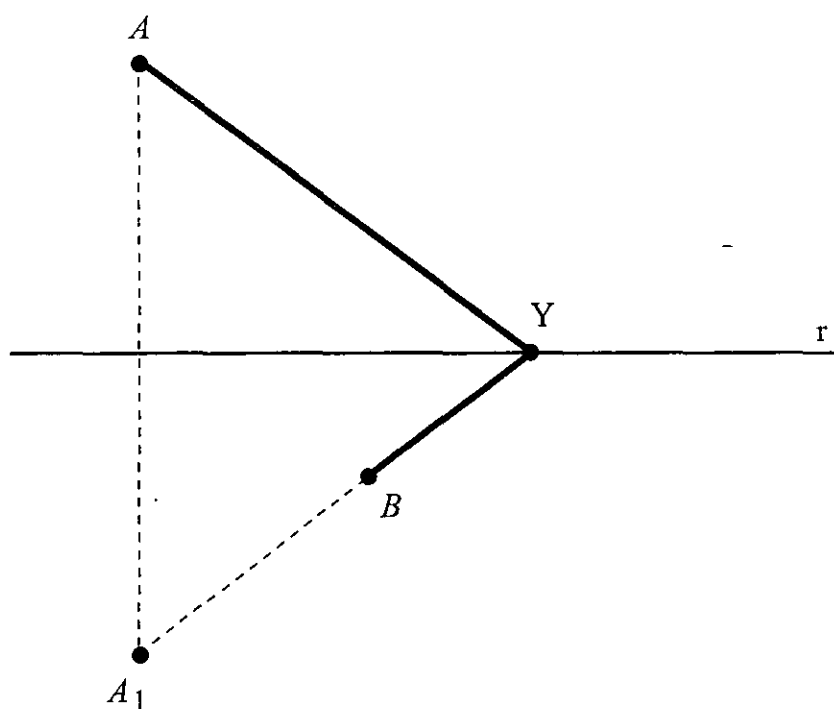



Figura 27.14

27.15 Sem perda da generalidade, podemos supor que α e β são números positivos, menores do que 360^0. Sejam r a reta AB e s a reta que passa por A de tal modo que o ângulo de r para s é $\alpha/2$. Seja ainda t a reta que passa por B e é tal que o ângulo de t para r é $\beta/2$. Chamamos de C o ponto de interseção de s e t. (Como $\alpha + \beta \neq 360^0$, as retas s e t não são paralelas.) As notações ρ_r, ρ_s e ρ_t indicarão as reflexões cujos eixos são as retas r, s e t, nesta ordem. Pelo exercício 27.4, tem-se $R = \rho_s \circ \rho_r$ e $S = \rho_r \circ \rho_t$. Logo $R \circ S = \rho_s \circ \rho_r \circ \rho_r \circ \rho_t = \rho_s \circ \rho_t$. Ainda pelo exercício 27.4, $\rho_s \circ \rho_t$ é a rotação em torno de C, de ângulo

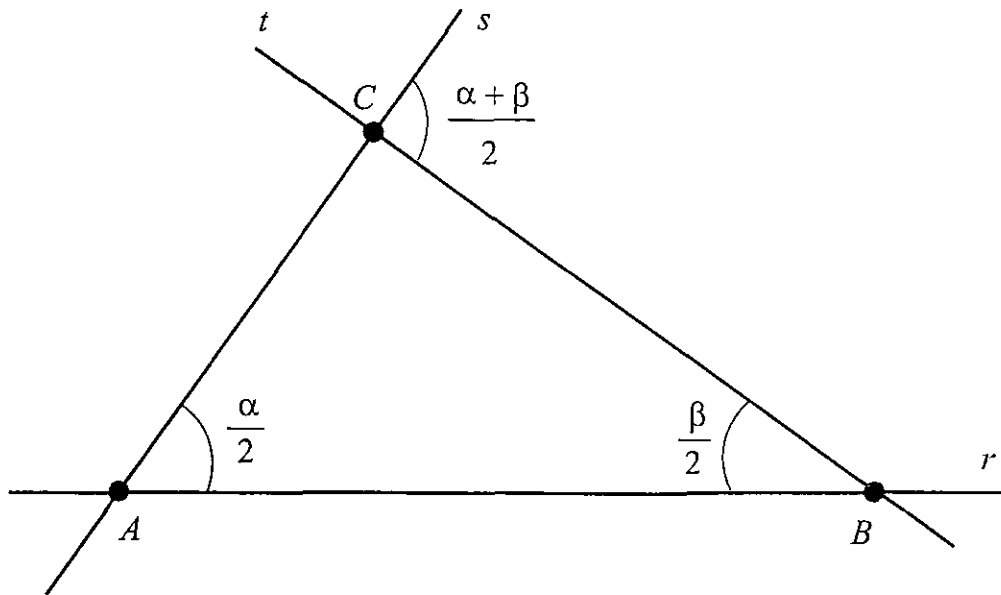



Figura 27.15

igual ao dobro do ângulo de t para s. Ora, o menor ângulo de que se pode girar t em torno do ponto O, no sentido positivo, até coincidir com s é o ângulo externo de vértice C do triângulo ABC, o qual é igual à soma dos ângulos internos do mesmo triângulo, de vértices A e B. Portanto $R \circ S$ é a rotação de centro C e ângulo $2(\alpha/2+\beta/2) = \alpha+\beta$.

Observação. Os exercícios 27.15 e 27.16 apresentam métodos alternativos (mais geométricos, menos analíticos) para responder as questões abordadas no exercício 26.6

27.16 Na notação do exercício anterior, tem-se ainda $R \circ S = \rho_s \circ \rho_t$ mas agora, como $\alpha+\beta = 360^0$, tem-se $\alpha/2+\beta/2 = 180^0$ logo os eixos de reflexão s e t são retas paralelas.

Resulta então do exercício 27.3 que $\rho_s \circ \rho_t$ é a translação T_v, com $v = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ e BC é perpendicular a AC.

27.17 (a) Seja E a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Se o ponto (x, y) satisfaz esta equação então os pontos $(-x, y)$ e $(x, -y)$ também satisfazem. Portanto E é simétrica em relação às retas $y = 0$ e $x = 0$, que são seus eixos principais.

(b) Seja $Y = X \cup T(X)$. Se $P \in Y$ então ou $P \in X$ ou $P \in T(X)$. No primeiro caso, tem-se $T(P) \in T(X)$, logo $T(P) \in Y$, No segundo caso, tem-se $P = T(P_0)$, com $P_0 \in X$, logo $T(P) = T(T(P_0)) = P_0 \in X$, donde $T(P) \in Y$. Em qualquer hipótese, vemos que $P \in Y$ implica $T(P) \in Y$ portanto Y é um conjunto simétrico em relação à reta r.

27.18 Na pág, 36 do livro "Medida e Forma em Geometria", está provado que toda isometria entre polígonos transforma vértices em vértices. Usaremos este fato aqui. Se a reflexão T, de eixo r, transforma o triângulo ABC em si mesmo então pelo menos um dos vértices, digamos A, está fora da reta r. Digamos ainda que $A_1 = T(A)$ seja o vértice B. Então $B_1 = T(B)$ é igual a A, r é a mediatriz de AB e $C_1 = T(C)$ só pode ser o vértice restante C, logo C pertence a r e $AC = BC$. Portanto o eixo r da reflexão T é altura e mediana sobre AB. Segue-se imediatamente que:

(a) Um triângulo isósceles não equilátero tem um único eixo de simetria, que é a altura baixada sobre a base;

(b) Um triângulo equilátero tem exatamente três eixos de simetria, que são suas alturas; (c) Um triângulo escaleno não possui eixos de simetria.

(d) A seguir, seja T uma reflexão que leva o quadrado $ABCD$ em si mesmo. Sabemos que T transforma vértices em vértices. Consideremos $A_1 = T(A)$. Se for $A_1 = B$ então o eixo r de T é a mediatriz do lado AB, logo $T(D) = C$ e essa mediatriz é um eixo de simetria. Se $A_1 = C$ então o eixo r de T é a mediatriz da diagonal AC, ou seja, é a diagonal BD, portanto $T(B) = B$, $T(D) = D$ e a diagonal BD é outro eixo de simetria do quadrado. Se $A_1 = D$ então o eixo de simetria é a mediatriz do lado AD. Finalmente, se $A_1 = A$ então, como T é uma isometria, $C_1 = T(C)$ é um ponto do quadrado tal que $d(A, C_1) = d(A, C)$. Segue-se que $C_1 = C$ e o eixo da reflexão T é a diagonal AC. Em suma: os eixos de simetria de um quadrado são as duas diagonais e as duas mediatrizes dos lados.

(e) Todos os diâmetros são eixos de simetria da circunferência. Reciprocamente, se reflexão T transforma a circunferência C em si mesma

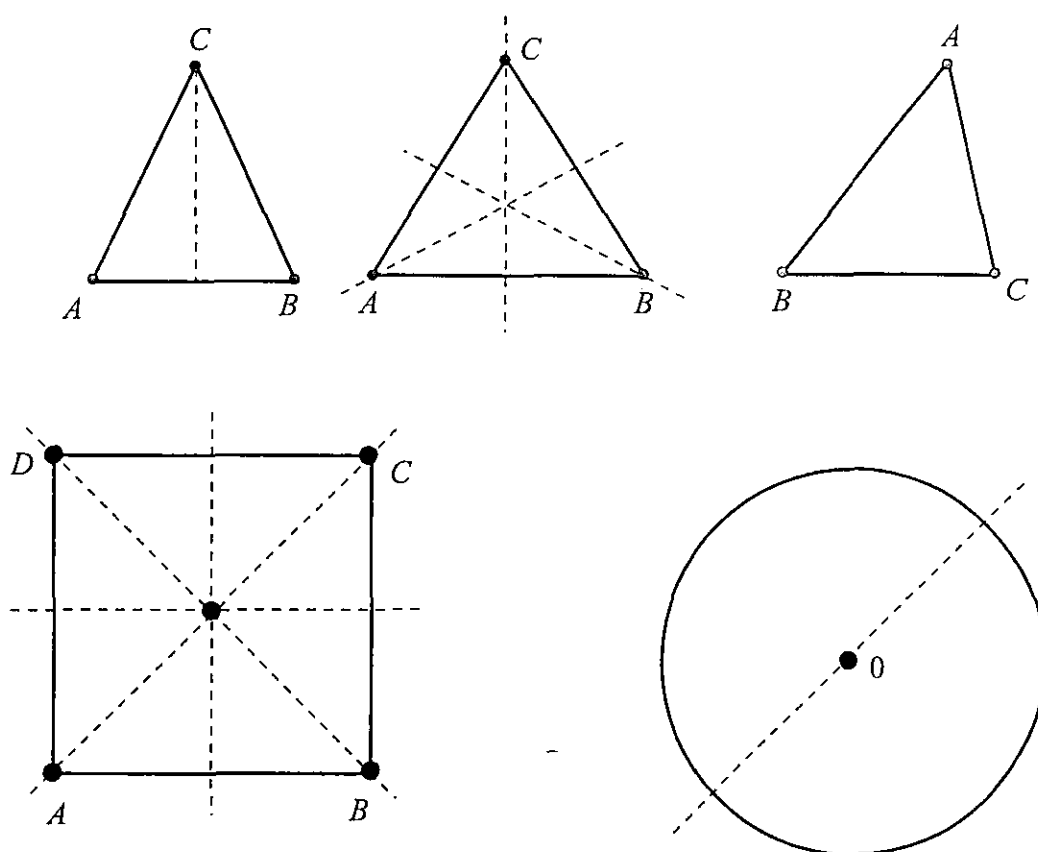



Figura 27.18

então, tomando um ponto P da circunferência fora do eixo r de T, vemos que r é a mediatriz da corda PP_1, logo r passa pelo centro de r. Portanto os diâmetros são os únicos eixos de simetria de C.

27.19 Seja F uma figura que possui dois eixos de simetria paralelos r e s. Indicando com R e S respectivamente as reflexões de eixos r e s e com $v = \overrightarrow{AB}$ o vetor perpendicular a essas retas, com $A \in r$ e $B \in s$, sabemos que $S \circ R = T_v$. Tomando um ponto P em F, temos $R(P) \in F$ e $P + v = S(R(P)) \in F$. Analogamente se vê que $P + 2v \in F$, $P + 3v \in F$. etc. Assim, F contém todos os pontos $P + n \cdot v, n \in \mathbb{N}$, logo é uma figura ilimitada.

27.20 A parte (a) é óbvia. Quando a (b), sejam O e O' centros de simetria distintos da figura F. Chamando de S e S' as simetrias de centros O e O' respectivamente, tem-se $S(P) \in F$ e $S'(P) \in F$

para todo ponto $P \in F$. Ao longo da reta $r = OO'$, consideremos os pontos O, O', O'', O''' etc, tais que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'O''} = \overrightarrow{O''O'''} = \cdots = v$. Afirmamos que todos esses pontos são centros de simetria de F. Comecemos com O''. Dado um ponto arbitrário P em F, devemos provar que seu simétrico P'' em relação a O'' ainda pertence a F. Ora, os pontos $P, S'(P), SS'(P)$ e $S'SS'(P)$, todos pertencentes a F, são os vértices de um paralelogramo no qual O e O'' são pontos médios de lados opostos. Logo $S'SS'(P)$ é o simétrico de vértice P em relação a O''. Noutras palavras, $S'SS'(P) = P''$. Portanto P'' pertence a F. A partir daí mostra-se que O''' é o centro de simetria de F, e assim por diante. Finalmente, dado qualquer ponto P em F, tem-se $S'S(P)+P+2v$, $S'SS'S(P) = P+4v$, etc. Todos esses pontos $P+n\cdot v$, $n \in \mathbb{N}$, pertencendo à figura F, segue-se que F é ilimitada.

(c) Com os dois eixos de simetria da figura F, que se supõem perpendiculares, formamos um sistema de eixos de coordenadas. Então, dado qualquer ponto (x, y) em F tem-se $(x, -y) \in F$ e $(-x, -y) \in F$, portanto a origem (interseção dos eixos de simetria) é um centro de simetria de F, pois $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ é a simetria em relação à origem.

(d) A interseção dos três eixos de simetria de um triângulo equilátero é o seu baricentro, o qual não é um centro de simetria pois o simétrico de um vértice em relação ao baricentro nunca pertence ao triângulo.

27.21 (a) Escolhendo convenientemente os eixos, a equação da parábola é $y = ax^2$. Portanto, se (x, y) pertence à parábola então $(-x, y)$ também pertence, logo o eixo vertical $x = 0$ é um eixo de simetria.

Qualquer outra reta divide o plano em duas partes, uma das quais contém uma porção ilimitada da parábola e a outra uma porção limitada (ou então vazia) dessa mesma parábola. Logo o eixo $x = 0$ é o único eixo de simetria da parábola. Por outro lado, a parábola não admite centro de simetria. Com efeito, se um ponto de coordenadas (m, n) fosse centro de simetria da parábola $y = ax^2$ então, para todo número real x, tomando $y = ax^2$, o ponto (x_1, y_1), com $x_1 = 2m - x$ e $y_1 = 2n - y$ pertenceria à parábola, ou seja, cumpriria a condição $y_1 = ax_1^2$. Substituindo e simplificando, teríamos $ax^2 - 2amx + 2am^2 - n = 0$ para todo valor real de x, um absurdo pois $a \neq 0$.

(b) Os eixos horizontal e vertical são eixos de simetria da hipérbole

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$

logo a origem é um centro de simetria. Não há outros eixos de simetria da hipérbole. Com efeito, suponhamos que uma certa reta r fosse eixo de simetria. Tomamos um novo sistema de coordenadas (u, v) no qual essa reta seja o eixo horizontal. Então, nesse sistema, a equação da hipérbole assumiria a forma $Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0$. Além disso, como o eixo horizontal é eixo de simetria, se (u, v) cumprem esta equação então $(u, -v)$ também cumpre, isto é, vale $Au^2 - Buv + Cv^2 + Du - Ev + F = 0$. Subtraindo, vem $(2Bu + 2E)v = 0$ para todo ponto (u, v) da hipérbole. Tomando um ponto da hipérbole com $v \neq 0$ concluimos que $2Bu + 2E = 0$ para toda abcissa u de um ponto da hipérbole, logo $B = 0$ e $E = 0$. Assim, a equação da hipérbole num sistema onde o eixo horizontal é eixo de simetria tem a forma $Au^2 + Cv^2 + Du + F = 0$. Fazendo a translação de eixos $w = u - D/2A$, sem mudar o eixo horizontal, a equação da hipérbole nas coordenadas (w, v) fica sendo $Aw^2 + Cv^2 + G = 0$, ou seja, $w^2/\alpha + v^2\beta = 1$, onde $\alpha = -G/A$ e $\beta = -G/C$. Como se trata de uma hipérbole, α e β têm sinais opostos, digamos $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Assim $\alpha = m^2, -\beta = n^2$. Em suma, se uma reta r é eixo de simetria de uma hipérbole e tomarmos um sistema de eixos ortogonais (com a origem adequadamente escolhida) no qual r seja o eixo horizontal então a equação da hipérbole nesse sistema tem a forma $w^2/m^2 - v^2/n^2 = 1$. Isto mostra que a reta r corta a hipérbole precisamente nos seus vértices (caso seja mesmo $\alpha > 0$ no argumento acima) ou então sua perpendicular levantada pela origem escolhida corta a hipérbole nos seus vértices. Consequentemente, a hipérbole só possui dois eixos de simetria.

Além disso, a hipérbole de equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ só tem um centro de simetria, que é o ponto $(0, 0)$. Com efeito, se o ponto de coordenadas (m, n) fosse centro de simetria dessa hipérbole então, para cada ponto (x, y) tal que $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ teríamos também $(2m - x)^2/a^2 - (2n - y)^2/b^2 = 1$. Desenvolvendo, substituindo $-y^2/b^2$ por $1 - x^2/a^2$ e simplificando, obtemos $(4m/a^2)x - (4n/a^2)y = 4m/a^2 -$

$4n/b^2$. Se uma das coordenadas m ou n fosse diferente de zero, esta equação diria que todos os pontos (x, y) da hipérbole estariam sobre uma reta. Logo $m = 0$, $n = 0$ e o único centro de simetria da hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ é a origem.

(c) Os eixos de simetria da grade são as retas horizontais e ordenadas inteiras ou metades de inteiros, as verticais de abcissas inteiras ou metades de inteiros (que são lados ou mediatrizes de lados dos quadrados de grade) e as retas da forma $y = x+n$ ou $y = -x+n$, com $m \in \mathbb{Z}$ (que são diagonais dos quadrados da grade). Não há outros eixos de simetria. Passamos a provar esta afirmação.

Evidentemente, os únicos eixos de simetria verticais da grade G são as retas $x = n/2$, com $n \in \mathbb{Z}$. Suponha agora que a reta r seja um eixo de simetria não-vertical. Então r corta o lado vertical de algum quadrado da grade. Tomemos um novo sistema de eixos no qual os lados desse quadrado tenham coordenadas 0 ou 1 e a equação da reta r nesse sistema seja $y = ax + b$, com $0 \leq b < 1$. Pelas equações (3) da pág. 152, as coordenadas do simétrico da origem em relação à reta r são $x_1 = -2ab/(1 + a^2)$ e $y_1 = 2b/(1 + a^2)$. Como $0 \leq b < 1$, tem-se $0 \leq 2b/(1+a^2) < 2$. Sendo y_1 inteiro, conclui-se que $2b/(1+a^2) = 1$ ou então $2b/(1 + a^2) = 0$. No primeiro caso, tem-se $x_1 = -a$, logo $a \in \mathbb{Z}$. Como sabemos que $b = (1 + a^2)/2$ e $0 \leq b < 1$, concluímos que $a^2 = 1$ ou $a^2 = 0$. Se for $a^2 = 1$, então $b = (1+a^2)/2 = 1$, o que está excluído pois $b < 1$. Se for $a^2 = 0$, tem-se $b = 1/2$, logo a equação da reta r é $y = 1/2$ e r é a mediatriz dos lados verticais do quadrado. Resta analisar o caso em que $2b/(1 + a^2) = 0$, ou seja, $b = 0$. Neste caso, a equação da reta r é $y = ax$ e as coordenadas do simétrico do ponto $(0, 1)$ em relação a r são $x_1 = 2a/(1 + a^2)$ e $y_1 = (a^2 - 1)/(a^2 + 1)$, que devem ser números inteiros. Seja $2a/(1 + a^2) = m$. Se $m = 0$, a reta r é o eixo horizontal. Se $m \neq 0$, a igualdade $2a/(1 + a^2) = m$, que significa $ma^2 - 2a + m = 0$, acarreta que $a = (1 \pm \sqrt{1 - m^2})/m$. Como m é inteiro não-nulo, deve ser $m^2 = 1$, donde $a = 1$ ou $a = -1$. Isto mostra que os demais eixos de simetria possíveis para a grade são as diagonais dos seus quadrados.

Quanto aos centros de simetria, é claro que entre eles estão os pontos (x, y) cujas coordenadas são números inteiros ou metade de

números inteiros. Estes pontos são os vértices, os pontos médios dos lados e os centros dos quadrados da grade. Não há outros centros de simetria além desses. Com efeito, se $0 = (p, q)$ é o centro de simetria então, para todo ponto (m, n) de coordenadas inteiras, as coordenadas $2p - m = a$ e $2q - n = b$ do seu simétrico em relação a 0 são inteiras. Logo, cada um dos números $p = (a+m)/2, q = (b+n)/2$ é um inteiro ou a metade de um inteiro.

27.22 Vimos no exercício 21.18 que somente três reflexões levam o triângulo equilátero $\Delta = ABC$ em si mesmo, a saber, aquelas cujos eixos são as alturas de Δ. Uma reflexão com deslizamento T não pode levar Δ em Δ porque $T \circ T$ é uma translação, que não transforma Δ em Δ. Logo aquelas três são as únicas simetrias de Δ que invertem orientação. Simetrias de Δ que preservam orientação são as rotações de 0^0, 60^0 e 120^0 em torno do baricentro. Não há outras. Com efeito, se T é uma rotação que leva Δ em Δ e $T(A) = A$ então, como o centro de T não pode ser vértice de Δ, temos $T = Id$ = rotação de 0^0. Se $T(A) = B$ então o centro de T está sobre a mediatriz de AB. Neste caso, $T \neq Id$ logo, como já vimos, não pode ser $T(B) = B$. Tampouco pode ser $T(B) = A$ porque isto obrigaria $T(C) = C$ e daí $T = Id$. Logo $T(B) = C$ e o centro da rotação T pertence à mediatriz de BC. Assim T é a rotação cujo centro é o baricentro de Δ e leva A em B, logo T é a rotação de 60^0 em torno do baricentro. Finalmente, se $T(A) = C$ então $T(B) = A$, o centro de T é a interseção das mediatrizes de AC e AB e T é a rotação de 120^0 em torno do baricentro de Δ. Ficam assim determinadas as seis simetrias do triângulo equilátero.

Vejamos agora as simetrias do quadrado $Q = ABCD$. As que invertem orientação são as quatro reflexões determinadas no exerc. 27.18. As que preservam orientação são as quatro rotações, de ângulos 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 e centro no ponto O, interseção das diagonais de Q. Não há outras simetrias de Q. Com efeito, uma simetria de Q não pode ser uma rotação, diferente da identidade, com centro num vértice. Dada uma rotação T que leva Q em Q, suponha que $T(A) = A$. Então $T = Id$. Se $T(A) = B$, o centro de T está sobre a mediatriz de AB. Como os únicos segmentos de reta em Q de mesmo comprimento que a

diagonal AC são as diagonais AC e BD e já temos $T(A) = B$, segue-se que $T(C) = D$. Logo o centro de T está sobre a mediatriz do lado CD. Assim T é a rotação de 90^0 em torno de O. Se $T(A) = C$, a diagonal AC é levada em si mesma logo $T(C) = A$, $T(B) = D$ e $T(D) = B$. T é então, a rotação de 180^0 em torno de O. Analogamente se vê que $T(A) = D$ implica que T é a rotação de 270^0 em torno de O. Estas são pois as oito simetrias do quadrado.

As simetrias da circunferência C são as reflexões em torno dos seus diâmetros e as rotações em torno do seu centro. Para provar que não há outras, observa-se primeiro que uma simetria de C transforma qualquer diâmetro AB num segmento de reta A_1B_1 com $d(A_1B_1) = d(A, B)$ logo A_1B_1 também é diâmetro. O centro O da circunferência é ponto médio de AB, logo $T(O) =$ ponto médio de A_1B_1, ou seja, $T(O) = O$. Portanto, toda simetria T da circunferência C deixa fixo o seu centro O. Assim, se T é uma reflexão, seu eixo é um diâmetro de C e se T é uma rotação seu centro é o centro de C.

Já no caso de uma elipse E (com eixos distintos) toda simetria T de E leva o eixo maior AB em si mesmo, pois não há em E outro par de pontos com distância igual a $d(A, B)$. Assim, ou se tem $T(A) = A$ e $T(B) = B$ ou então $T(A) = B$ e $T(B) = A$. No primeiro caso, T pode ser a identidade ou a reflexão em torno do eixo AB. No segundo caso, T pode ser a reflexão em torno do eixo menor CD ou a simetria em torno do ponto O, interseção dos eixos AB e CD. Estas são as quatro simetrias da elipse E.

Se temos um triângulo isósceles não equilátero ABC, com $AB = AC$, toda simetria T de ABC deve levar o lado diferente BC em si mesmo. Assim, ou $T(C) = C$ e $T(B) = B$, donde $T(A) = A$ e $T = Id$, ou então $T(C) = B$, $T(B) = C$, donde $T(A) = A$ e T é a reflexão em torno da altura baixada de A.

Finalmente, uma simetria T de um triângulo escaleno ABC deve levar cada lado em si mesmo pois não há outro de mesmo comprimento. Logo deve levar cada vértice em si próprio. Já vimos que nenhuma simetria de ABC pode ser uma reflexão. Tampouco pode ser uma rotação diferente de Id pois têm três pontos fixos. Logo $T = Id$.

27.23 Sejam R_0, R_1, R_2, R_3 as rotações de ângulos 0^0, 90^0, 180^0 e 270^0 em torno do centro O do quadrado Q, L_1 e L_2 as reflexões em torno das mediatrizes dos lados e D_1, D_2 as reflexões em torno das diagonais de Q. A tabela de multiplicação do grupo das simetrias de Q é:

$\circ$	R_0	R_1	R_2	R_3	L_1	L_2	D_1	D_2
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	L_1	L_2	D_1	D_2
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	D_1	D_2	L_2	L_1
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	L_2	L_1	D_2	D_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	D_2	D_1	L_1	L_2
L_1	L_1	D_2	L_2	D_1	R_0	R_2	R_3	R_1
L_2	L_2	D_1	L_1	D_2	R_2	R_0	R_1	R_3
D_1	D_1	L_1	D_2	L_2	R_1	R_3	R_0	R_2
D_2	D_2	L_2	D_1	L_1	R_3	R_1	R_2	R_0

27.24 Dados $A \neq B$, se a isometria $T \colon \Pi \to \Pi$ é tal que $T(A) = A$ e $T(B) = B$ então T transforma a reta AB em si mesma e, como tem dois pontos fixos nessa reta, todos os pontos de AB são fixos por T, pelo exerc. 2.6. Como translações, reflexões com deslizamento e rotações diferentes da identidade não admitem dois pontos fixos, segue-se que $T = Id$ ou então T é a reflexão em torno da reta AB. Dadas as isometrias S, T com $S(A) = T(A)$ e $S(B) = T(B)$ então a isometria $R = T^{-1} \circ S$ deixa A e B fixos. Pelo que vimos, $R = Id$ ou R é a reflexão em torno de AB, logo $S = T$ ou $S = T \circ R$ é a composta de T com reflexão em torno de AB.

27.25 Sejam A, B, C vértices de um triângulo e S, T isometrias com $S(A) = T(A)$, $S(B) = T(B)$ e $S(C) = T(C)$. Pelo exercício anterior, das duas primeiras igualdades resulta que $S = T$ ou S é a composta de T com a reflexão de eixo na reta AB. Esta última possibilidade fica excluída porque $S(C) = T(C)$. Logo $S = T$.

27.26 Seja $d(A, B) = d(A_1, B_1) > 0$. Se AB e A_1B_1 são paralelas, há 2 casos: 1º) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Então a translação T_v, com $v = \overrightarrow{AA_1}$, é uma isometria que preserva orientação, com $T_v(A) = A_1$

e $T_v(B) = B_1$. Além disso, se chamarmos de r a paralela a AB e a A_1B_1 que é equidistante (passa pelo meio) dessas retas, a reflexão de eixo r leva o segmento AB no segmento $A'B'$, com A' e B' colineares a A_1 e B_1. Então a reflexão de eixo r, seguida do deslizamento $\overrightarrow{A'A_1}$, é uma isometria que inverte orientação, leva A em A_1 e B em B_1. 2º) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1}$. Neste caso, os segmentos AA_1 e BB_1 se intersectam num ponto O e a simetria (rotação de 180^0) em torno de O é a isometria que preserva orientação, leva A em A_1 e B em B_1. Para obter a isometria que inverte orientação e cumpre essas condições, considere a reta r, perpendicular a AB e a A_1B_1, situada de tal modo que B e B_1 sejam equidistantes dela. A reflexão em torno de r leva AB no segmento $A'B'$ tal que $B'B_1$ é paralelo a r. Portanto, a reflexão de eixo r, seguida do deslizamento de vetor $v = \overrightarrow{B'B_1}$, leva A em A_1 e B em B_1.

Suponhamos, em seguida, que AB e A_1B_1 não sejam paralelos. Então as mediatrizes de AA_1 e BB_1 se encontram num ponto O. A rotação de centro O que leva A em A_1 leva também B em B_1. Uma isometria que inverte orientação e tem este mesmo efeito obtém-se fazendo seguir-se a essa rotação a reflexão de eixo A_1B_1.

27.27 Seja (cfr. exerc. 27.26) T uma isometria do plano que leva A em A_1 e B em B_1. Seja C' o simétrico do ponto C_1 em relação à reta A_1B_1. Então ou $T(C) = C_1$ (e neste caso T é a isometria procurada) ou $T(C) = C'$ e, nesta segunda hipótese, a isometria que procuramos é T seguida da reflexão com eixo A_1B_1.

27.28 Isto já foi feito no exerc. 27.26. As isometrias são a rotação de 180^0 com centro na interseção das diagonais do paralelogramo ABA_1B_1 e a reflexão em torno de uma perpendicular comum a AB e A_1B_1 (escolhida de modo que B e B_1 sejam equidistantes dela), seguida da translação que leva o simétrico de B (em relação a essa perpendicular) em B_1.

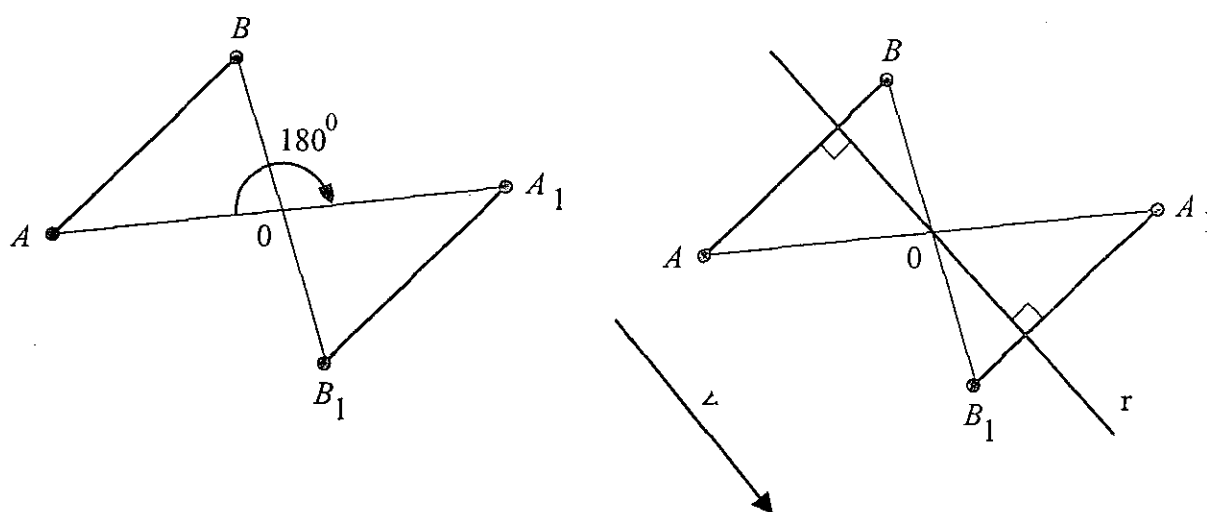



Figura 27.28

27.29 Seja α o ângulo da rotação T. Tome uma reta s, passando por O, tal que o ângulo de r para s seja igual a $\alpha/2$. Se ρ_r e ρ_s indicarem as reflexões de eixos r e s respectivamente, tem-se $T = \rho_s \circ \rho_r$.

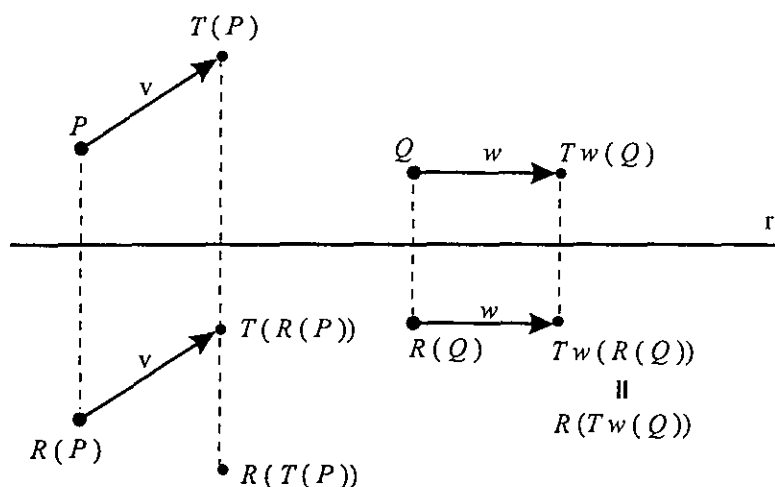



Figura 27.30

27.30 Tome um sistema de eixos ortogonais no qual a reta r seja o eixo das abcissas. Nesse sistema, seja $v = (\alpha, \beta)$. Então, para cada ponto $P = (x, y)$, tem-se $R(P) = (x, -y)$ e $T(P) = (x+\alpha, y+\beta)$. Logo $TR(P) = T(x, -y) = (x+\alpha, -y+\beta)$ enquanto $RT(P) = R(x+\alpha, y+\beta) = (x+\alpha, -y+\beta)$. Consequentemente, tem-se $RT(P) = TR(P)$ para todo P, se, e somente se, $\beta = -\beta$, ou seja, $\beta = 0$. Em suma, a

reflexão R de eixo r comuta com a translação T_v se, e somente se, o vetor v for paralelo à reta r.

27.31 A reta dada é $y = (1/2)x - 1$. Utilizando diretamente as fórmulas (3) da pág. 152, com $x = 3$, $y = 8$, $a = 1/2$ e $b = -1$ obtém-se $x_1 = 9$ e $y_1 = -4$.

27.32 Sejam r a reta $y = x$, e s o eixo vertical. Se ρ_r e ρ_s representam as reflexões em torno dessas duas retas, a composta $\rho_s \circ \rho_r$ coincide com a rotação de 90^0 (no sentido positivo) em torno de O.

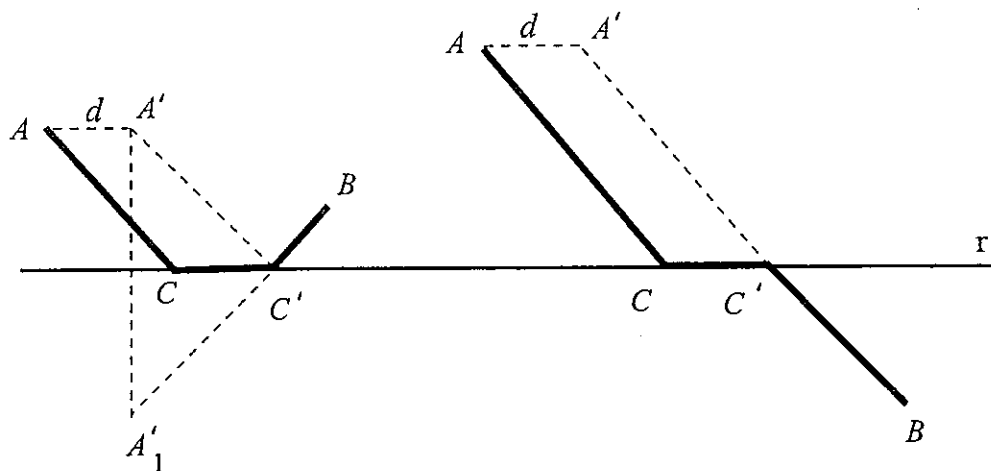



Figura 27.33

27.33 No enunciado do problema, admite-se tacitamente que, ao atingir o ponto C partindo de A, o ponto percorre a distância d ao longo da reta r, dirigindo-se *no sentido do ponto* B. Para obter o ponto C trace, a partir de A, na direção de B, um segmento de reta AA', paralelo a r, de comprimento d. Seja C' o ponto da reta r que torna a soma $d(A', C') + d(C', B)$ a mínima possível. Toma-se C sobre r de modo que AC seja paralelo a $A'C'$. Se A e B estiverem no mesmo lado de r, o ponto C' é obtido na forma do exerc. 27.13. Se A e B estiverem em lados opostos de r, C' é apenas a interseção de r com o segmento $A'B$ e novamente C é tomado sobre r com AC paralelo a $A'C'$.

28.1 Dados pontos $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ arbitrários no plano,

temos $S(P) = P_1$ e $S(Q) = Q_1$, onde $P_1 = (1 - 3y, 2 + 3x)$ e $Q_1 = (1-3y', 2+3x')$. Como se vê facilmente, $d(P_1, Q_1) = 3 \cdot d(P, Q)$. Logo S é uma semelhança de razão 3. Analogamente se verifica que T é uma semelhança de razão 2. [Ambas, S e T, invertem orientação.]

28.2 Neste exercício, admite-se tacitamente que $r > 0$. Sabemos que a fórmula da distância entre dois pontos fornece o mesmo valor, seja qual for o sistema de eixos em relação ao qual se tomam as coordenadas desses pontos. Portanto, se $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$ no sistema OXY enquanto que $P_1 = (rx, ry)$ e $Q_1 = (rx', ry')$ no sistema $O'X'Y'$ então $d(P_1, Q_1) = r \cdot d(P, Q)$ logo T é uma semelhança de razão r.

28.3 Dados arbitrariamente os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, temos $P_1 = (mx - ny + p, nx + my + q)$ e $Q_1 = (mu - nv + p, nu + mv + q)$, logo

$$\begin{aligned} d(P_1, Q_1) &= \sqrt{(mx - ny - mu + nv)^2 + (nx + my - nu - mv)^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + n^2)[(x-u)^2 + (y-v)^2]} \\ &= \sqrt{m^2 + n^2} \cdot d(P, Q). \end{aligned}$$

Portanto a transformação $T\colon (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ é uma semelhança de razão $r = \sqrt{m^2 + n^2}$.

28.4 Uma verificação análoga à do exercício anterior mostra que $S\colon \Pi \to \Pi$, definida por $S(x, y) = (x_1, y_1)$, com $x_1 = mx + ny + p, y_1 = nx - my + q$, é uma semelhança de razão $r = \sqrt{m^2 + n^2}$. Isto também pode ser concluído sem nenhum cálculo adicional, observando apenas que $S = T \circ R$, onde T é a transformação do exercício anterior e R é a reflexão em torno do eixo horizontal.

28.5 Sejam $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$, de modo que $\overrightarrow{OA} = c_1$ e $\overrightarrow{OB} = c_2$ são os vetores unitários dos eixos OX e OY respectivamente. Tem-se $O_1 = T(O) = (p, q)$, $A_1 = T(A) = (m + p, n + q)$ e $B_1 = T(B) = (-n + p, m + q)$. Os vetores $\overrightarrow{O_1A_1} = (m, n)$ e $\overrightarrow{O_1B_1} = (-n, m)$, ambos de comprimento $\sqrt{m^2 + n^2}$, determinam os eixos ortogonais O_1X_1 e O_1Y_1, do sistema $O_1X_1Y_1$, transformado de OXY pela semelhança T.

Como $(-n, m)$ resulta de (m, n) por uma rotação de 90^0 no sentido positivo, segue-se que os sistemas OXY e $O_1X_1Y_1$ são igualmente orientados, ou seja, que T preserva orientação. De modo análogo, levando em conta que o vetor $(n, -m)$ resulta de (m, n) por uma rotação de -90^0, conclui-se que a semelhança S inverte a orientação do plano. [Na seção 31 poder-se-á chegar à mesma conclusão observando que a matriz $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$ da semelhança T tem determinante $m^2 + n^2 > 0$ enquanto que a matriz $\begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix}$ da semelhança S tem determinante $-n^2 - m^2 < 0$.]

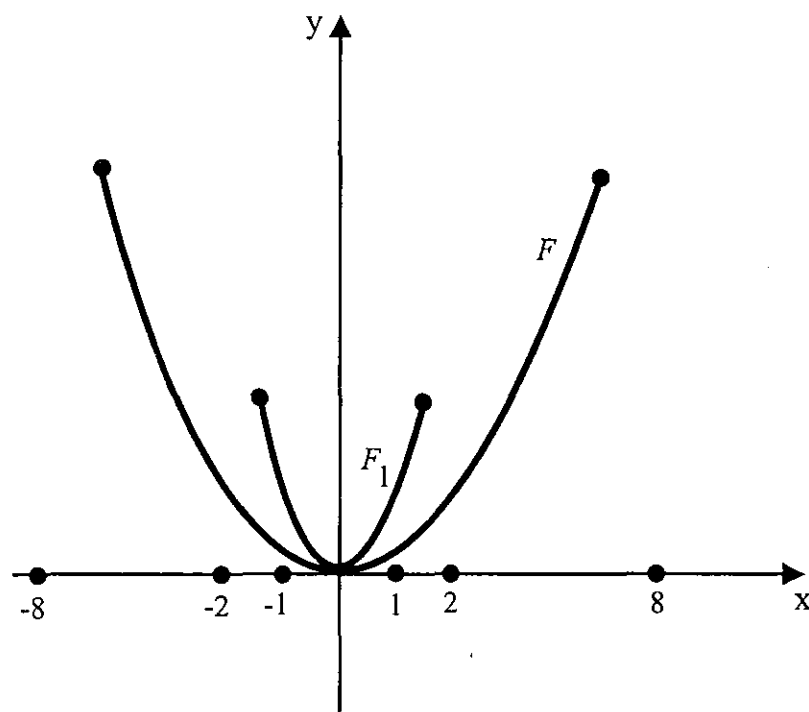



Figura 28.6

28.6 Temos $\sigma(x, y) = (x_1, y_1)$ onde $x_1 = ax$ e $y_1 = ay$. Se (x, y) pertence à parábola dada então $y = ax^2$, logo $y_1 = a(ax^2) = (ax)^2 = (x_1)^2$. Portanto σ transforma a parábola $y = ax^2$ na parábola $y = x^2$. Pelo exercício 25.6, dada qualquer parábola $y = ax^2 + bx + c$, existe uma translação T que a transforma na parábola $y = ax$. Logo a semelhança $\sigma \circ T$ transforma a parábola $y = ax^2 + bx + c$ na parábola

$y = x^2$. Portanto qualquer parábola é semelhante à parábola $y = x^2$ e assim duas parábolas quaisquer são figuras semelhantes.

28.7 Uma semelhança $\sigma \colon \Pi \to \Pi$, de razão r, transforma qualquer retângulo de base x e altura y (portanto de área $A = xy$) num retângulo de base rx e altura ry, logo de área $ry \cdot ry = r^2 A$. A área de uma figura F é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares (reuniões de retângulos justapostos) contidos em F. (Veja "Medida e Forma em Geometria", pág. 22.) Se σ leva a figura F na figura F_1, segue-se do que foi dito acima que todo polígono retangular de área A contido em F é transformado por σ num polígono retangular de área $r^2 A$ contido em F_1. Além disso, usando a semelhança inversa σ^{-1}, vê-se que todo polígono retangular contido em F_1 é o transformado por σ de algum polígono retangular contido em F. Portanto, as aproximações por falta para a área de F_1 são os números $r^2 A$, onde A é uma aproximação por falta da área F.

Conclui-se então que área $(F_1) = r^2 \times$ área (F).

28.8 Seja $\sigma \colon \Pi \to \Pi$ uma semelhança de razão r. O ponto P pertence à circunferência de centro O e raio a se, e somente se, $d(O, P) = a$. Sejam $O_1 = \sigma(O)$ e $P_1 = \sigma(P) \cdot P_1$ pertence à circunferência de centro O e raio a se, e somente se, $d(O_1, P_1) = r \cdot a$. Como $d(O_1, P_1) = r \cdot d(O, P)$, conclui-se que $d(O_1, P_1) = r \cdot a$ se, e somente se, $d(O, P) = a$. Assim, a imagem por σ da circunferência de centro O e raio a é a circunferência de centro $O_1 = \sigma(O)$ e raio ra.

Em seguida, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY e a elipse E, de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ relativamente a coordenadas nesse sistema. A semelhança σ, de razão r, leva os eixos OXY num par de eixos ortogonais $O_1X_1Y_1$ e o ponto $P = (x, y)$ no ponto P_1 cujas coordenadas no sistema $O_1X_1Y_1$ são $x_1 = rx$, $y_1 = ry$. O ponto (x, y) pertence à elipse E se, e somente se,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

isto é,

$$\frac{x_1^2}{(ar)^2} + \frac{y_1^2}{(br)^2} = \frac{(xr)^2}{(ar)^2} + \frac{(yr)^2}{(br)^2}$$
$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portanto a imagem da elipse E é por σ é a elipse de equação $x_1^2/(ar)^2 + y_1^2/(br)^2 = 1$ no sistema de eixos $O_1X_1Y_1$.

O mesmo raciocínio acima mostra que σ leva a parábola $y = ax^2$ e a hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ na parábola $y_1 = (a/r)x_1^2$ e na hipérbole $x_1^2/(ar)^2 - y_1^2/(br)^2 = 1$, respectivamente. Aqui x_1 e y_1 são coordenadas em relação ao sistema de eixos $O_1X_1Y_1$, imagem do sistema OXY pela semelhança σ.

28.9 Sejam C e C_1 circunferências de centros O, O_1 e raios r, s respectivamente. Considere um sistema de eixos ortogonais com origem no ponto O, no qual as coordenadas de O_1 são (a, b). A transformação $\sigma\colon \Pi \to \Pi$, definida por $\sigma(x, y) = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = \frac{s}{r}x + a$, $y_1 = \frac{s}{r}y + b$ é uma semelhança (cfr. exerc. 28.3). Tem-se $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = \frac{s^2}{r^2}(x^2 + y^2)$. Portanto o ponto (x_1, y_1) pertence à circunferência C_1 se, e somente se, (x, y) pertence a C. Noutras palavras, a imagem de C por σ é C_1.

28.10 No exercício 28.8 foi mostrado que uma semelhança de razão r transforma a elipse de eixos a, b numa elipse de eixos $a_1 = ar$ e $b_1 = br$, portanto $b_1/a_1 = b/a$. A mesma semelhança leva a hipérbole de eixos a, b numa hipérbole de eixos $a_1 = ar$ e $b_1 = br$, logo $b_1/a_1 = b/a$. Portanto em duas elipses ou duas hipérboles semelhantes a razão entre os eixos é a mesma. Reciprocamente se uma elipse (ou hipérbole) tem eixos a, b e outra tem eixos a_1, b_1 com $b_1/a_1 = b/a$ então $a_1/a = b_1/b = r$. Sejam OXY e $O_1X_1Y_1$ sistemas de eixos ortogonais tais que a reta OX contém o eixo maior e OY contém o eixo menor da primeira figura, enquanto O_1X_1 contém o eixo maior da segunda figura e O_1Y_1 contém o eixo menor. Seja $\sigma\colon \Pi \to \Pi$ a transformação que leva um ponto de coordenadas (x, y) no sistema OXY no ponto de coordenadas (rx, ry) no segundo sistema. Então, como no exerc. 28.8, vê-se que

σ transforma a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (coordenadas em OXY) na elipse $x_1^2/a_1^2 + y_1^2/b_1^2 = 1$ (coordenadas em $O_1X_1Y_1$), isto é, σ leva a primeira elipse na segunda. De modo análogo se vê que σ leva a primeira hipérbole na segunda.

29.1 A homotetia H, de centro O e razão 3 é dada por $H(x, y) = (x_1, y_1)$ onde $x_1 = 3x$, $y_1 = 3y$, donde $x = x_1/3$ e $y = y_1/3$. Portanto, se o ponto (x, y) pertence à reta $3x-2y = 4$ tem-se $3(x_1/3)-2(y_1/3) = 4$, ou seja, $3x_1 - 2y_1 = 12$. Portanto a homotetia de centro O e razão 3 leva a reta $3x-2y = 4$ na reta $3x-2y = 12$. Analogamente, se o ponto (x, y) pertence à circunferência cuja equação é $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ então $(x_1/3-1)^2 + (y_1/3+2)^2 = 4$. Multiplicando ambos os membros desta equação por 9, vem $(x_1 - 3)^2 + (y_1 + 6)^2 = 36$. Assim, H transforma a circunferência de centro no ponto $(1, -2)$ e raio 2 na circunferência de centro $(3, -6)$ e raio 6.

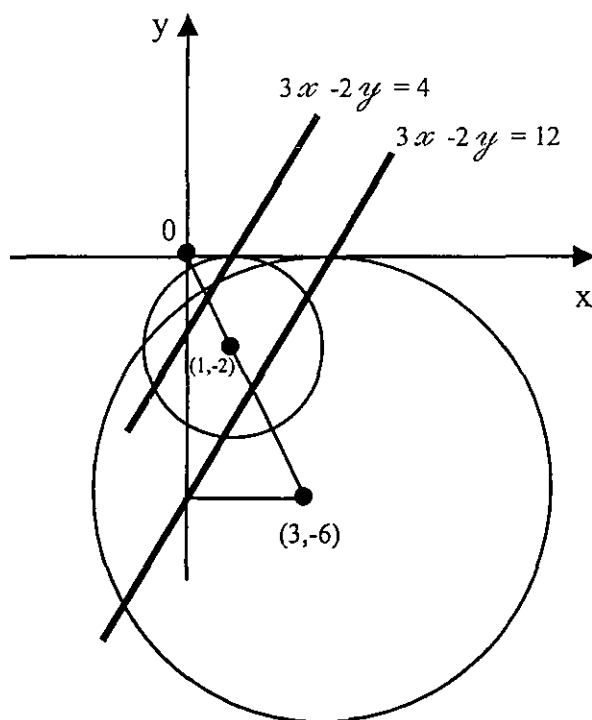



Figura 29.1

29.2 A homotetia H de centro P e a razão $1/2$ transforma a circunferência C numa circunferência C' de raio metade do raio de C. O

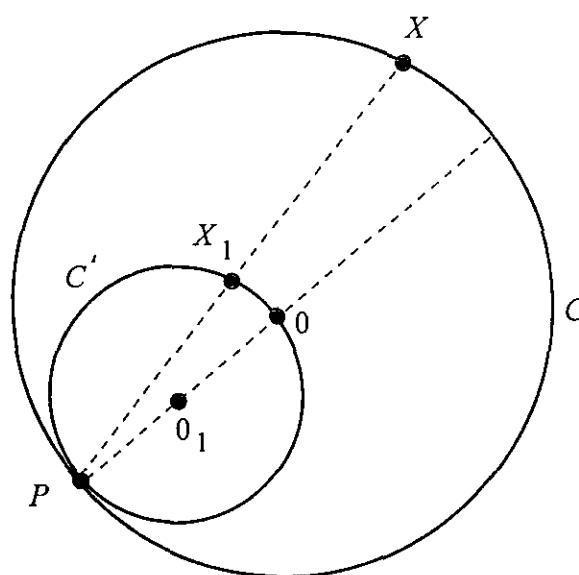



Figura 29.2

diâmetro de C que passa por P é transformado por H no diâmetro de C' que passa por P e o centro de C' está sobre esse diâmetro, a uma distância de P igual à metade do raio de C. Logo C e C' são tangentes no ponto P. Em geral, se $0 < r < 1$, a homotetia de centro P e razão r transforma C numa circunferência C' de raio r, tangente a C no ponto P e a corda de C' que parte de P é igual a $1/r$ da corda de C' que parte de P na mesma direção.

29.3 Por definição, esse conjunto é a imagem da circunferência C pela homotetia de centro Q e razão $1/2$, logo é uma circunferência cujo raio é a metade do raio de C. [O resultado vale também quando o ponto Q é exterior à circunferência.]

29.4 Seja AB um segmento de reta perpendicular a s, levantado a partir de um ponto A em s. A semelhança σ transforma AB no segmento A_1B_1, perpendicular a s. Como σ preserva orientação, B e B_1 estão do mesmo lado de s. Como a razão r da semelhança σ é diferente de 1, a reta BB_1 não é paralela a s. Sejam O o ponto de interseção de BB_1 com s e H a homotetia de centro O e razão r. A transformação $T = H^{-1} \circ \sigma$ deixa fixos os pontos A e B e preserva

orientação. Pelo exerc. 27.24, T é a transformação identidade, ou seja, $H = \sigma$. Portanto, σ é a homotetia de centro O e razão r.

29.5 Considere uma homotetia $H\colon \Pi \to \Pi$, de razão $1/r$, com centro num ponto arbitrário O. Sejam $A_2 = H(A_1)$, $B_2 = H(B_1)$ e $C_2 = H(C_1)$. Então $d(A,B) = d(A_2,B_2)$, $d(A,C) = d(A_2,C_2)$ e $d(B,C) = d(B_2,C_2)$. Pelo exerc. 27.27, existe uma isometria $T\colon \Pi \to \Pi$ tal que $T(A) = A_2$, $T(B) = B_2$ e $T(C) = C_2$. Daí decorre que $\sigma = H^{-1} \circ T$ é uma semelhança (de razão r) com $\sigma(A) = A_1, \sigma(B) = B_1$ e $\sigma(C) = C_1$. Se r for outra semelhança com estas propriedades então $r^{-1} \circ \sigma$ é uma isometria que deixa fixos os pontos A, B e C, logo $r^{-1} \circ \sigma = Id$ (pelo exerc. 27.25), ou seja, $r = \sigma$. Portanto é única a semelhança σ que leva A, B e C em A_1, B_1 e C_1 respectivamente.

29.6 Seja $d(A_1,B_1) = r \cdot d(A,B)$. Se $r = 1$, as semelhanças que levam A em A_1 e B em B_1 são as isometrias descritas no exerc. 27.26. Se $r \neq 1$, torna-se o ponto B_2 tal que $\overrightarrow{A_1B_2} = (1/r)\overrightarrow{A_1B_1}$. Então $d(A_1,B_2) = d(A,B)$. As duas isometrias S,T do exerc. 27.26 levam A em A_1 e B em B_2. Seja H a homotetia de centro A_1 e razão r. As semelhanças $H \circ S$ e $H \circ T$ levam A em A_1 e B em B_1.

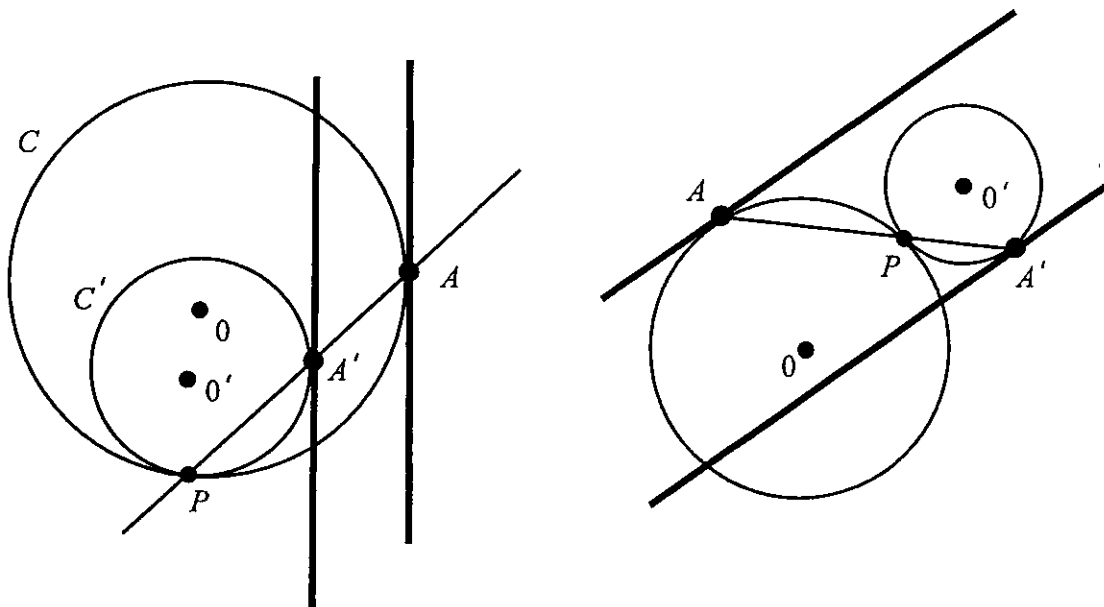



Figura 30.1

30.1 Seja $d(P, A') = r \cdot d(P, A)$. Suponha inicialmente que C e C' sejam tangentes internamente. A homotetia H de centro P e razão r leva A em A', P em P' e a circunferência C numa circunferência C_1 que contém A' e é tangente a C no ponto P, logo $C' = C_1$. Portanto H leva a tangente a C no ponto A na tangente a C' no ponto A'. Resulta daí que estas tangentes são paralelas. Se C e C' forem tangentes externamente, vale um argumento análogo, tornando-se a homotetia de centro P e razão negativa $-r$.

30.2 A homotetia H de centro $(1,1)$ e razão negativa -3 transforma o ponto (x, y) em (x_1, y_1), com $x_1 = 1 - 3(x - 1)$ e $(y_1) = 1 - 3(y - 1)$, donde $x = 1 - x_1/3$ e $y = 1 - y_1/3$. A reta $4x - y = 2$ é, portanto, levada por H na reta $4(1 - x_1/3) - (1 - y_1/3) = 2$, ou seja, $4x_1 - y_1 = -3$. [Como devia, H transforma uma reta que não passa pelo centro $(1,1)$ noutra reta paralela.]

31.1 Suponha que σ e τ ambas preservam orientação. Fixando um sistema de eixos ortogonais OXY tem-se, digamos, $\sigma(x, y) = (mx - ny + p, nz + my, q)$ e $r(x, y) = (m'x - n'y - p', n'x + m'y + q')$. Logo

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \alpha \cdot \sigma(x, y) + \beta \cdot \tau(x, y) \\ &= (ax - by + c, bx + ay + d), \end{aligned}$$

com $a = \alpha m + \beta m'$, $b = \alpha n + \beta n'$, $c = \alpha p + \beta p'$ e $d = \alpha q + \beta q'$. Pelo exerc. 28.3, ou se tem $a = b = 0$ (em cujo caso T é uma transformação constante) ou então T é uma semelhança. Argumento análogo se aplica quando ambas σ e τ invertem orientação. [A hipótese $\alpha + \beta = 1$ intervém apenas para assegurar que a expressão $\alpha\sigma(P) + \beta\tau(P)$ faz sentido, independentemente do sistema de eixos adotado.]

31.2 Se $T = Id$ (translação pelo vetor nulo) então $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id =$ translação de vetor nulo. Se a translação T não é a identidade então, para todo ponto P do plano, tem-se $T(\sigma(P)) \neq \sigma(P)$, donde $\sigma^{-1}(T(\sigma(P)))) \neq P$, pois σ^{-1} é injetiva. Assim, $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma$ não tem ponto fixo (e é obviamente uma semelhança). Pelo Teorema da seção 31, conclui-se que $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma$ é uma isometria, a qual certamente preserva orientação (mesmo que σ a inverta). Ora,

uma isometria que preserva orientação e não tem ponto fixo é uma translação.

31.3 Se a semelhança σ preserva orientação, suas equações num sistema de eixos OXY são $x_1 = mx - ny + p$, $y_1 = nx + my + q$, onde $(x_1, y_1) = \sigma(x, y)$. Resolvendo o sistema linear $mx - ny = x_1 - p$, $nx + my = y_1 - q$ obtém-se:

$$x = \frac{m}{m^2+n^2}(x_1 - p) + \frac{n}{m^2+n^2}(y_1 - q)$$
$$y = \frac{-n}{m^2+n^2}(x_1 - p) + \frac{m}{m^2+n^2}(y_1 - q).$$

Estas são as equações da semelhança inversa σ^{-1}. Analogamente se procede no caso em que σ inverte orientação.

31.4 Basta considerar o caso em que σ e τ preservam orientação, pois os demais são análogos. Tem-se então $\sigma(x, y) = (mx - ny, nz + my)$ e $\tau(x, y) = (px - qy, qx + py)$. Portanto $\sigma(\tau(x, y)) = (x_1, y_1)$, onde

$$x_1 = m(px - qy) - n(qx + py) = (mp - nq)x - (np + mq)y$$
$$y_1 = n(px - qy) + m(qx + py) = (np + mq)x + (mp - nq)y.$$

Reconhece-se assim, por suas equações, que a composta $\sigma \circ \tau$ é uma semelhança que preserva orientação e que a matriz de $\sigma \circ \tau$ é o produto das matrizes de σ e τ.

31.5 e 31.6 A semelhança σ que leva $ABC \cdots L$ em $A_1B_1C_1 \cdots L_1$ preserva orientação, o mesmo ocorrendo com a transformação identidade Id. Dados os números reais α, β com $\alpha + \beta = 1$, o exerc. 31.1 assegura que $T = \alpha\sigma + \beta Id$ é uma semelhança ou uma transformação constante. Os exercícios 31.5 e 31.6 resultam daí pois o polígono $A_0B_0C_0 \cdots L_0$ é a imagem de $ABC \cdots L$ pela transformação T. (No caso do exerc. 31.5 tem-se $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.)

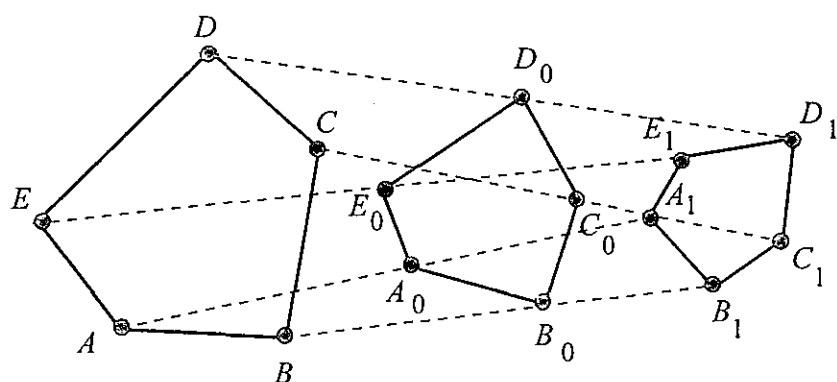



Figura 31.5

31.7 Este exercício também resulta de 31.1, considerando a semelhança σ que leva C em C_1 e o ponto A no ponto A_1.

31.8 De $\sigma(x,y) = (u,v)$, com $u = x + y$ e $v = x - y$ resulta que

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Portanto, de $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0$ resulta que

$$\frac{(u+v)^2}{2} + \frac{3(u+v)(u-v)}{4} + \frac{(u-v)^2}{2} - 1 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{7}{4}u^2 + \frac{1}{4}v^2 = 1,$$

logo σ transforma a curva $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0$ numa elipse. Ora a transformação σ, cuja matriz é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, é uma semelhança de razão $\sqrt{2}$, que inverte orientação (pois o determinante de sua matriz é -2). Portanto a curva original também é uma elipse.

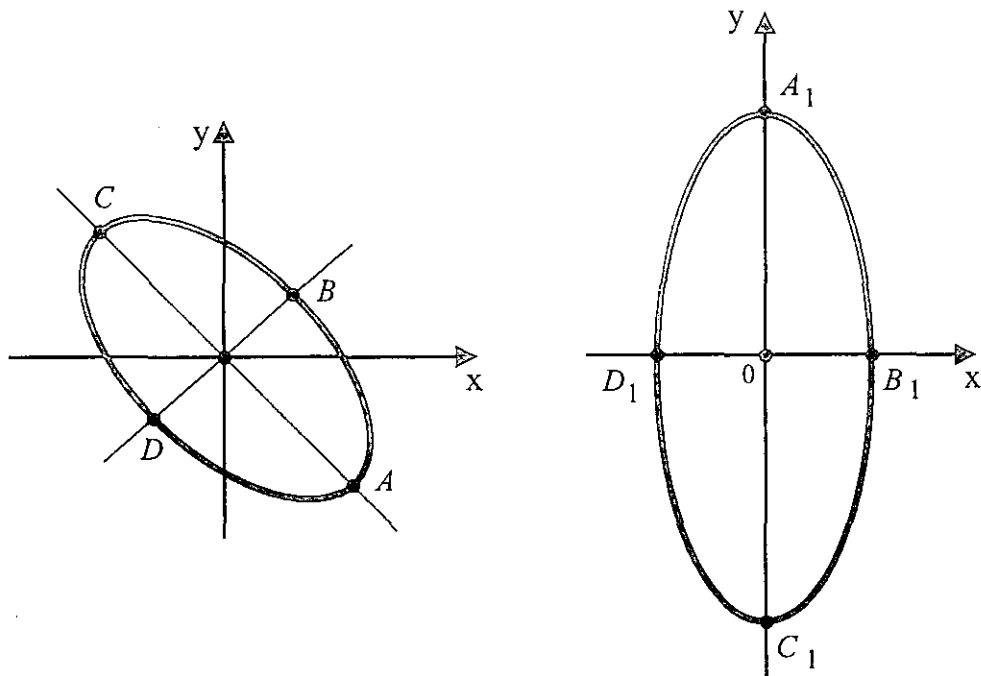



Figura 31.8

32.1 Se $F\colon \Pi \to \Pi$ é uma transformação afim e $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$ então, pela fórmula (1) da pág. 166, se $\alpha + \beta + \gamma = 1$ tem-se $F(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1$. Tomando $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$, conclui-se que F transforma o baricentro do triângulo ABC no baricentro do triângulo $A_1B_1C_1$.

32.2 Dados os pontos arbitrários P, Q no plano tem-se

$$\begin{aligned} T((1-t)P + tQ) &= \alpha F((1-t)P + tQ) + \beta G((1-t)P + tQ) \\ &= (1-t)\alpha F(P) + t\alpha F(Q) \\ &\quad + (1-t)\beta G(P) + t\beta G(Q) \\ &= (1-t)[\alpha F(P) + \beta G(P)] \\ &\quad + t[\alpha F(Q) + \beta G(Q)] \\ &= (1-t)T(P) + tT(Q). \end{aligned}$$

Logo T é uma transformação afim.

32.3 Sejam $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$. Então $(1-t)P + tQ = ((1-t)x + tx', (1-t)y + ty')$. Temos $F(P) = (x_1, y_1)$, $F(Q) = (x_2, y_2)$ com

$x_1 = ax+by+p$, $y_1 = cx+dy+q$, $x_2 = ax'+by'+p$, $y_2 = cx'+dy'+q$. Pondo $F((1-t)P+tQ) = (x_3, y_3)$ vem

$$\begin{aligned} x_3 &= (1-t)ax + tax' + (1-t)by + tby' + p \\ &= (1-t)(ax+by+p) + t(ax'+by'+p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= (1-t)cx + tcx' + (1-t)dy + tdy' + q \\ &= (1-t)(cx+dy+q) + t(cx'+dy'+q) \end{aligned}$$

logo

$$F((1-t)P+tQ) = (x_3, y_3) = (1-t)F(P) + tF(Q).$$

[Este exercício desenvolve um detalhe que foi omitido na pág. 167.]

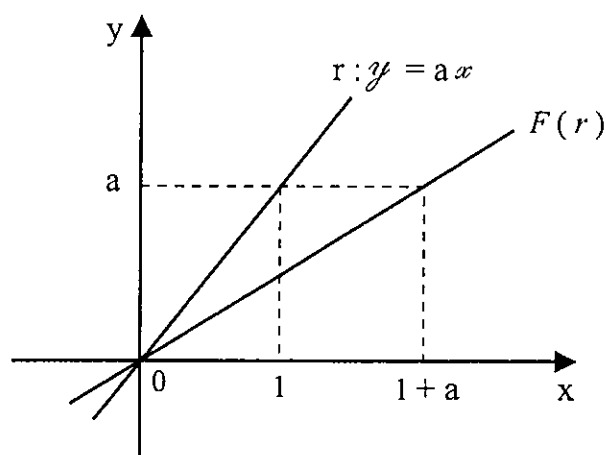



Figura 32.4

32.4 Temos $F(x,y) = (x_1, y_1)$, com $x_1 = x+y$ e $y_1 = y$, logo $x = x_1 - y_1$. Portanto

$$\begin{aligned} &y = ax \Rightarrow y_1 = a(x_1 - y_1) \Rightarrow ax_1 - (a+1)y_1 = 0, \\ &y = -x/a \Rightarrow y_1 = (y_1 - x_1)/a \Rightarrow x_1 + (A-1)y = 0. \end{aligned}$$

Assim, as retas $y = ax$ e $y = -x/a$ são transformadas por F nas retas $ax - (a+1)y = 0$ e $x + (a-1)y = 0$ respectivamente. Para que estas duas últimas retas sejam perpendiculares, deve-se ter (veja pág. 43)

$a - a^2 + 1 = 0$, ou seja, $a^2 - a - 1 = 0$. As raízes desta equação são $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Qualquer um destes dois valores, quando atribuídos à inclinação a, responde a questão. [Este exercício estabelece um caso particular de um teorema que será provado na pág. 192.]

32.5 Dados os pontos arbitrários P, Q e o número real t, vale:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(1-t)P + tQ) &= G(F((1-t)P + tQ)) \\ &= G((1-t)F(P) + tF(Q)) \\ &= (1-t)G(F(P)) + tG(F(G)) \\ &= (1-t)(G \circ F)(P) + t(G \circ F)(Q).\end{aligned}$$

Além disso, se F é invertível então, para P e Q quaisquer, existem $P_0 = F^{-1}(P)$ e $Q_0 = F^{-1}(Q)$ tais que $F(P_0) = P$ e $F(Q_0) = Q$. Logo, para todo número real t, vale:

$$\begin{aligned}F^{-1}((1-t)P + tQ) &= F^{-1}((1-t)F(P_0) + tF(Q_0)) \\ &= F^{-1}(F((1-t)P_0 + tQ_0)) \\ &= (F^{-1} \circ F)((1-t)P_0 + tQ_0) \\ &= (1-t)P_0 + tQ_0 \\ &= (1-t)F^{-1}(P) + tF^{-1}(Q).\end{aligned}$$

Logo a composta $G \circ F$ e a inversa F^{-1} são transformações afins, desde que F e G sejam.

32.6 Se $F(0) = O_1$ seja $v = \overrightarrow{OO_1}$ e considere $G = T_v^{-1} \circ F$. Pelo exercício anterior, G é uma transformação afim. Além disso, tem-se $G(O) = T_v^{-1}(F(O)) = T_v^{-1}(O_1) = O$ e $F = T_v \circ G$.

32.7 Fixemos arbitrariamente um sistema de eixos ortogonais OXY, em relação ao qual se tem $v = (\alpha, \beta)$, onde v é o vetor da translação T. Assim, $T(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$ para todo ponto $P = (x, y)$ do plano. Pelas equações (2) da pág. 167, tem-se ainda $G(x, y) = (x_1, y_1)$, onde $x_1 = ax + by + p$ e $y_1 = cx + dy + q$. Portanto, $(G \circ T)(x, y) =$

$G(T(x,y)) = G(x+\alpha, y+\beta) = (x_2, y_2)$, onde

$$\begin{aligned} x_2 &= a(x+\alpha) + b(y+\beta) + p \\ &= ax + by + p + a\alpha + b\beta = x_1 + a' \\ y_2 &= c(x+\alpha) + d(y+\beta) + q \\ &= cx + dy + q + c\alpha + d\beta = y_1 + \beta'. \end{aligned}$$

Escrevendo $v' = (\alpha', \beta')$, onde $\alpha' = a\alpha + b\beta$ e $\beta' = c\alpha + d\beta$ e chamando de T' a translação de vetor v', vê-se que $(G \circ T)(x,y) = (x_1 + \alpha', y_1 + \beta') = T'(x_1, y_1) = (T' \circ G)(x,y)$. [Esta parte do exercício mostra que se G é uma transformação afim do plano, com $G(P) = P_1$ e $G(Q) = Q_1$, o vetor $v' = \overrightarrow{P_1Q_1}$ depende apenas do vetor $v = \overrightarrow{PQ}$ mas não dos pontos P e Q. Noutras palavras, se os pontos A, B, C, D são levados por G em A_1, B_1, C_1 e D_1 respectivamente e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. Assim, a transformação afim G opera não somente sobre pontos mas também sobre vetores, transformando o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ no vetor $v' = \overrightarrow{A_1B_1}$. O leitor poderá verificar que a correspondência $v \mapsto v'$ assim definida é o que se chama uma "transformação linear", isto é $(v+w)' = v' + w'$ e $(\alpha \cdot v)' = \alpha \cdot v'$ para quaisquer vetores v, w e todo número real α.]

Se a transformação afim G for sobrejetiva, será também injetiva, logo possuirá uma inversa G^{-1} que ainda é afim. Pelo que acabamos de ver, dada a translação T existe uma translação S tal que $G^{-1} \circ T^{-1} = S \circ G^{-1}$. Tomando o inverso de ambos os membros desta equação e escrevendo $S^{-1} = T''$, vem $T \circ G = G \circ T''$.

32.8 Dado qualquer ponto P do plano, sua imagem $F(P)$ pertence à reta r, logo $F(F(P)) = F(P)$. Isto prova que $F \circ F = F$.

32.9 Sejam P, P' tais que $F(P) = P$ e $F(P') = P'$ e sejam α, β números reais com $\alpha + \beta = 1$. Escrevendo $\alpha P + \beta P' = Q$ tem-se $F(Q) = F(\alpha P + \beta P') = \alpha F(P) + \beta F(P') = \alpha P + \beta P' = Q$.

32.10 Seja X o conjunto dos pontos P do plano tais que $F(P) = P$.

Pelo exercício anterior, juntamente com o exerc. 20.11, há três possibilidades para o conjunto X: (a) $X = \{A\}$ reduz-se a um único

ponto A; (b) $X = \Pi$ é todo o plano; (c) $X = r$ é uma reta. No caso (a), para todo ponto P do plano, como $F(F(P)) = F(P)$, tem-se $F(P) = A$, portanto F é uma transformação constante. No caso (b), tem-se $F(P) = P$ para todo ponto P do plano, logo F é a transformação identidade. No caso (c), a reta r é a imagem da transformação F. Seja então r' a reta que une um ponto P qualquer fora de r à sua imagem $P_1 = F(P)$. Tem-se $F(P_1) = F(F(P)) = F(P)$ logo, pelo que se viu na pág. 169, cada reta s paralela a r' é transformada por F num único ponto, o qual deve ser a interseção $A = s \cap r$ pois $F(A) = A$. Conclui-se então que, no caso (c), F é a projeção sobre a reta r, paralelamente à reta r'.

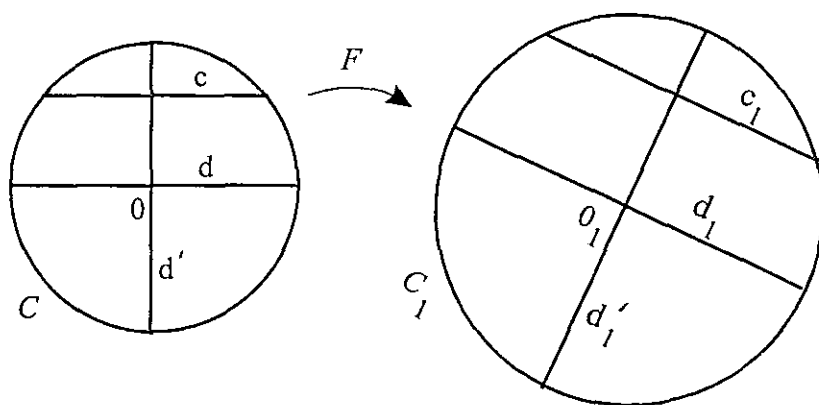



Figura 32.11

32.11 O objetivo deste exercício é provar que uma transformação afim F que leva uma circunferência C noutra circunferência C_1 é uma semelhança. Seu enunciado praticamente contém a solução, salvo por dois pontos que esclareceremos agora. *Primeiro*: a reta que une os pontos médios de duas cordas paralelas é um diâmetro perpendicular a ambas essas cordas. Isto é verdadeiro porque o triângulo cujos vértices são o centro da circunferência e as extremidades de uma corda é isósceles, logo a mediana e a altura que partem do centro coincidem. Assim, a reta que passa pelo centro e divide uma corda ao meio é perpendicular à mesma logo é perpendicular à outra corda (pois elas são paralelas) e portanto a divide também ao meio. *Segundo*: se a transformação afim F leva um par de diâmetros perpendiculares em C num par de diâmetros perpendiculares em C_1 então F é uma semelhança.

Com efeito, sejam r a razão entre o raio de C_1 e o raio de C, O e O_1 os centros de C e C_1, e OX, OY raios perpendiculares em C, transformados por F nos raios O_1X_1, O_1Y_1 perpendiculares em C_1. Ao longo dos eixos OX e OY, a transformação afim F multiplica as distâncias pelo mesmo fator constante r, pois os raios O_1X_1 e O_1Y_1 têm ambos comprimentos iguais a r vezes os comprimentos de OX e OY. Portanto, se $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ são os vetores unitários dos eixos OX, OY enquanto f_1 e f_2 são os vetores unitários dos eixos O_1X_1, O_1Y_1, temos $\overrightarrow{O_1A_1} = r \cdot f_1$, $\overrightarrow{O_1B_1} = r \cdot f_2$, onde $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$. As coordenadas (x, y) de cada ponto P do plano no sistema de eixos OXY são definidas pela relação $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$, ou seja, $P = O + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Como F é afim, segue-se daí que

$$
\begin{aligned}
F(P) &= F(O + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}) \\
&= O_1 + x\overrightarrow{O_1A_1} + y\overrightarrow{O_1B_1} \\
&= O_1 + rxf_1 + rxf_2.
\end{aligned}
$$

Assim, as coordenadas de $F(P)$ no sistema $O_1X_1Y_1$ são (rx, ry) se as coordenadas de P no sistema OXY são (x, y). Conclui-se daí que F é uma semelhança.

33.1 Sejam F e G as projeções ortogonais sobre as retas r e s respectivamente. F e G são transformações afins de posto um. Se r e s são perpendiculares então $F \circ G$ tem posto zero (é constante). Se r e s são oblíquas então $F \circ G$ tem r como imagem, logo seu posto é um.

33.2 Para transformações afins, "posto dois" é o mesmo que "invertível". Logo a composta de duas transformações afins de posto dois tem também posto dois.

33.3 A composta $T \circ R$ da projeção R sobre a reta r com a translação T de vetor paralelo a r é uma transformação afim de imagem r, logo de posto um, a qual não tem pontos fixos portanto não pode ser uma projeção.

33.4 Sejam r, s retas paralelas e T uma transformação afim de posto dois. Se as retas $r_1 = T(r)$ e $s_1 = T(s)$ não fossem paralelas, existiria

um ponto $P_1 = T(P)$ comum a r_1 e s_1, logo teríamos $P \in r$ e $P \in s$, um absurdo.

33.5 Para todo P, o ponto $T(P) = 2F(P) - P$ é o simétrico de P em relação a $F(P)$ (vide Exemplo, pág. 103). Assim, T é a reflexão oblíqua de eixo r, paralelamente à reta r'.

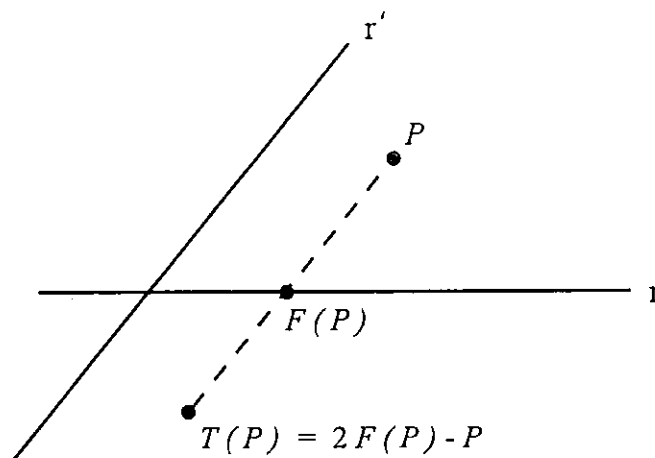



Figura 33.5

33.6 Resulta das definições que

$$\begin{aligned}
(F \circ F)(P) &= F\left(\frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P\right) = \frac{1}{2}F(T(P)) + \frac{1}{2}F(P) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T(T(P)) + \frac{1}{2}T(P)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}T(P)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P\right) \\
&= \frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P = F(P),
\end{aligned}$$

portanto $F \circ F = F$. De acordo com o exerc. 32.10, há três possibilidades:

(a) F é uma transformação constante. Então existe um ponto C tal que $\frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P = C$ para todo ponto P. Isto significa que para todo P, C é o ponto médio do segmento que liga P a $T(P)$. Então T é a simetria (rotação de 180^0) em torno de C.

(b) F é a transformação identidade. Neste caso, para todo ponto P tem-se $\frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P = P$. Isto quer dizer que todo ponto P do plano é o ponto médio do segmento que liga P a $T(P)$. Então $T(P) = P$ para todo P e $T = Id$.

(c) F é a projeção sobre uma reta r, paralelamente a uma reta r'. Se tal é o caso, então a igualdade $F(P) = \frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}P$ diz que, para todo P, o ponto $F(P)$, interseção de r com a paralela a r' tirada por P, é o ponto médio do segmento que liga P a $T(P)$. Assim, T é a reflexão oblíqua em torno de r, paralelamente a r'.

34.1 As equações procuradas são da forma $x_1 = ax + by + p$, $y_1 = cx + dy + q$, onde os coeficientes a, b, c, d, p, q são determinados usando as equações da pág. 175 que, neste caso, são: $a+b+p = 2$, $c+d+q = 0$, $a + 2b + p = 2$, $c + 2d + q = 2$, $p = 0$, $q = 3$. Segue-se daí que $a = 2$, $b = 0$, $c = -5$, $d = 2$, $p = 0$ e $q = 3$. As equações procuradas são $x_1 = 2x$, $y_1 = -5x + 2y + 3$.

34.2 Basta impor que a transformação leve A em A_1, B em B_1 e C em C_1. Como $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ são paralelogramos, a condição de levar D em D_1 é uma conseqüência. As equações procuradas são do tipo $x_1 = ax + by + p$, $y_1 = cx + dy + q$. Os coeficientes a, b, c, d, p, q são obtidos usando-se as equações da pág. 175 que, neste caso, são $p = 0$, $q = 0$, $b = -3$, $d = 1$, $3a = -1, 3c = 4$. Portanto as equações procuradas são $x_1 = -x/3 - 3y$, $y_1 = 4x/3 + y$.

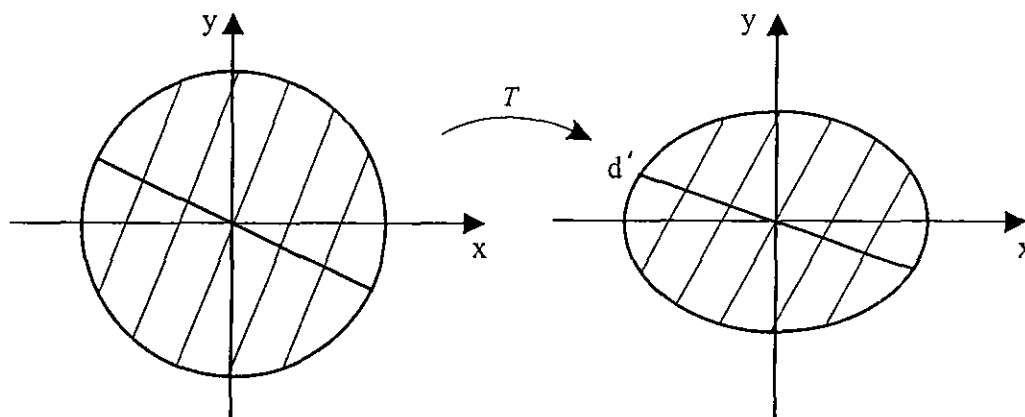



Figura 37.1

37.1 Na solução do exerc. 32.11 viu-se que a corda que passa pelos

pontos médios de duas cordas paralelas numa circunferência é um diâmetro. Logo os pontos médios de todas as cordas paralelas a uma reta dada r estão sobre um mesmo diâmetro. Dadas a elipse E, de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a reta r, seja r_0 a reta que é levada em r pela transformação $T(x, y) = (ax, by)$. A circunferência C, de equação $x^2 + y^2 = 1$, é levada por T na elipse E, as retas paralelas a r_0 são levadas em paralelas a r, os pontos médios das cordas de C paralelas a r_0 são levados por T nos pontos médios das cordas de E paralelas a r e o diâmetro de C que passa por esses pontos médios é levado numa corda de E que passa pelo centro dessa elipse.

37.2 Temos a transformação $T(x, y) = (x_1, y_1)$, $x_1 = ax$, $y_1 = bx$. Podemos supor que a equação da reta r tem a forma $y_1 = \lambda x_1$. Portanto a equação da reta r_0, levada em r por T, é $by = \lambda ax$, ou seja, $y = (\lambda a/b)x$. A reta que contém o diâmetro d' é a imagem por T da reta r_0^*, perpendicular a r_0 pela origem. Pelo que acabamos de ver, se a equação de d' é $y_1 = \lambda' x_1$ então a equação de r_0^* é $y = (\lambda' a/b)x$. Mas, sendo r_0^* perpendicular a r_0, sua equação deve ser $y = -(b/\lambda a)x$. Portanto $\lambda' a/b = -b/\lambda a$ e daí $\lambda\lambda' = -b^2/a^2$.

37.3 Com efeito, no contexto dos dois exercícios anteriores, os diâmetros d e d' são imagens por T de dois diâmetros perpendiculares da circunferência C, cada um dos quais corta ao meio as cordas paralelas ao outro. Como pontos médios e paralelismo são preservados pela transformação afim T, segue-se que cada um dos diâmetros conjugados d e d' divide ao meio as cordas paralelas ao outro.

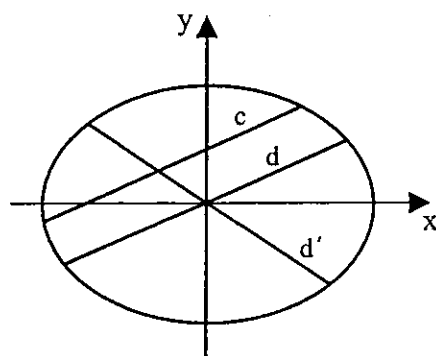



Figura 37.4

37.4 Ligue esse ponto médio ao centro da elipse.

37.5 A transformação afim T, que leva a circunferência C na elipse E, leva um ponto A_0 de C no ponto A, a tangente t a C no ponto A_0 na tangente à elipse no ponto A e o diâmetro paralelo a essa tangente t (logo perpendicular ao diâmetro que passa por A_0) no diâmetro conjugado a AA', o qual é portanto paralelo à tangente à elipse pelo ponto A. Então, para traçar a tangente à elipse pelo ponto A, traça-se primeiro o diâmetro conjugado a AA', pelo método do exercício anterior e traça-se por A uma paralela a esse diâmetro.

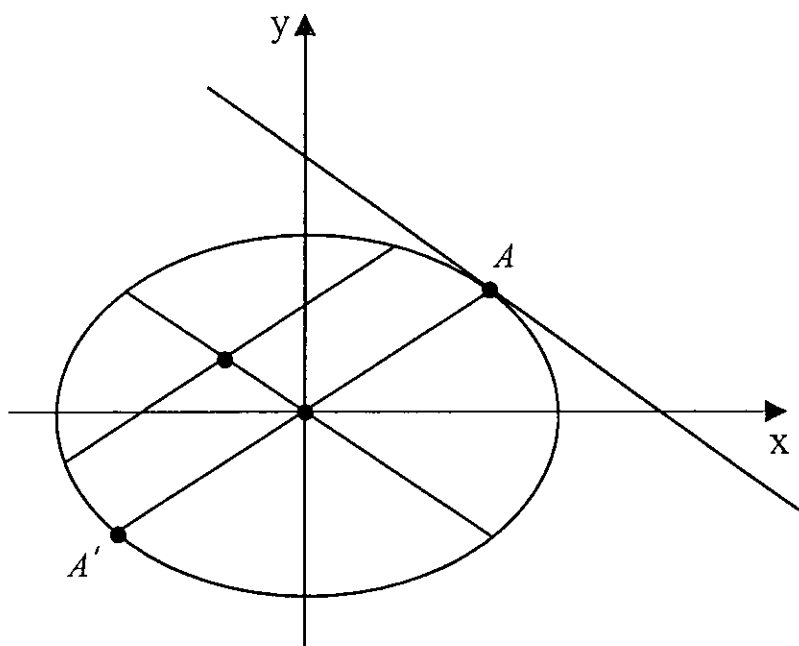



Figura 37.5

37.6 Esse paralelogramo, que tem dois raios conjugados como vértices consecutivos, é imagem por T do quadrado que tem como dois lados consecutivos dois raios perpendiculares da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A área desse quadrado é 1 e o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ associada à transformação T é ab. Segue-se do Teorema da seção 35 que a área desse paralelogramo é ab.

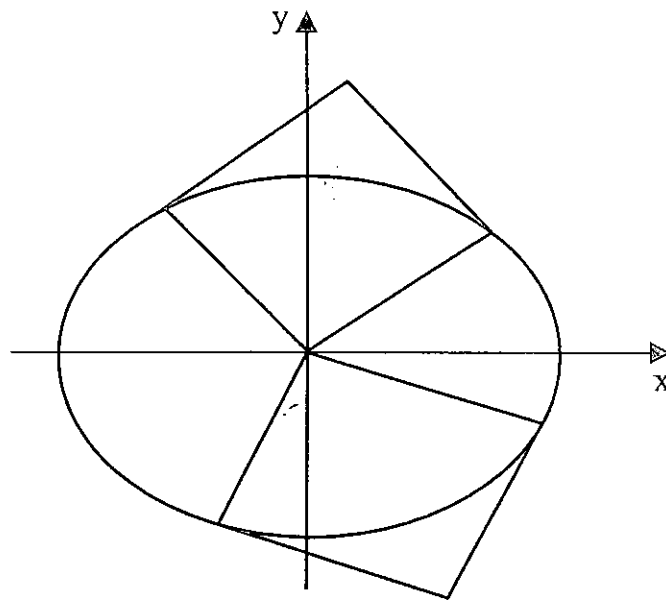



Figura 37.6

37.7 Novamente, isto resulta do Teorema da seção 35 pois tal paralelogramo é a imagem por T do quadrado determinado pelas tangentes a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A área desse quadrado é 4 logo o paralelogramo tem área $4ab$.

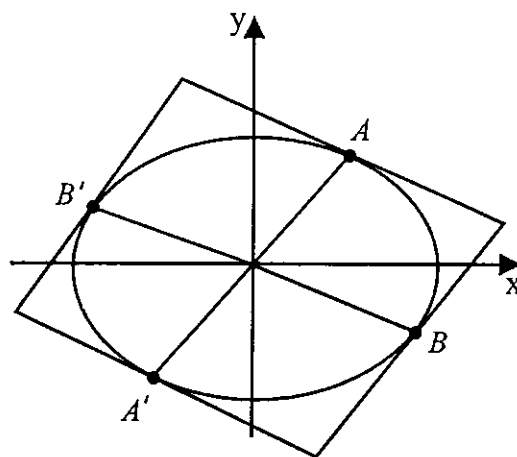



Figura 37.7

37.8 Sejam (x, y) e $(-y, x)$ os extremos de raios perpendiculares na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que são levados pela transformação $T(x, y) = (ax, by)$ nos extremos (ax, by) e $(-ay, bx)$ de raios conjugados da elipse. A soma dos quadrados dos comprimentos desses raios

conjugados é

$$\begin{aligned}(ax)^2 + (by)^2 + (ay)^2 + (bx)^2 &= a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)\\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

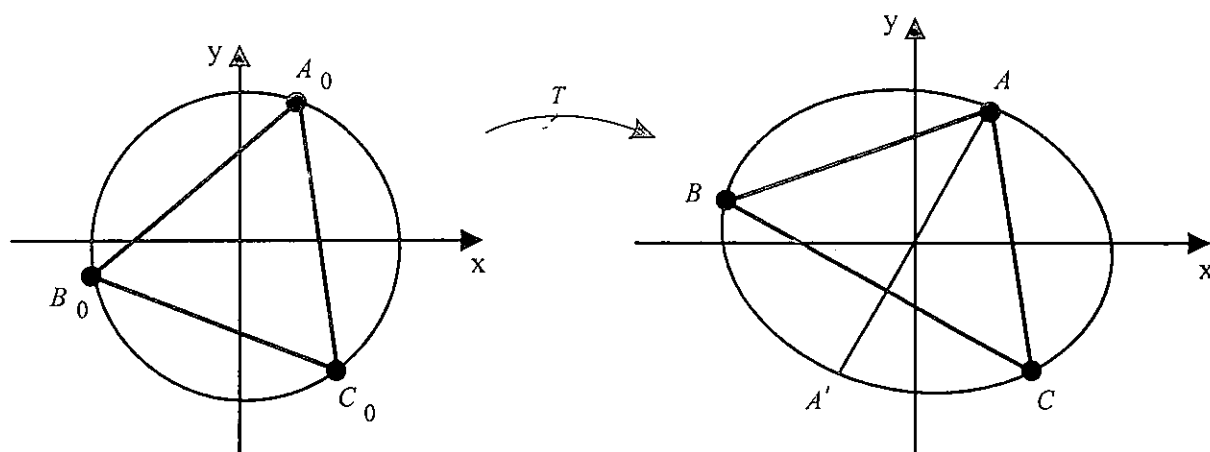



Figura 37.9

37.9 A elipse E é a imagem de uma circunferência Γ pela transformação afim T. Seja $T(A_0) = A$. Todo triângulo ABC, do qual A é um vértice, inscrito na elipse E, é imagem por T de um triângulo $A_0B_0C_0$, de vértice A_0, inscrito na circunferência Γ. Mostremos primeiro que, entre estes triângulos $A_0B_0C_0$, o de maior área é o equilátero. Para isto observemos que, entre todos os triângulos de base A_0B_0, inscritos em Γ, o de maior altura (e portanto de maior área) é aquele $A_0B_0C_0$ tal que $A_0C_0 = B_0C_0$. Analogamente, entre todos os triângulos $A_0B_0C_0$ de base A_0C_0 inscritos em Γ, o de maior área é aquele em que $A_0B_0 = B_0C_0$. Conseqüentemente, entre todos os triângulos inscritos em Γ com vértice A_0, o de maior área é aquele em que $A_0B_0 = A_0C_0 = B_0C_0$, ou seja, o equilátero. Neste triângulo equilátero $A_0B_0C_0$, o diâmetro A_0A_0' corta o lado B_0C_0 num ponto P_0 tal que $d(A_0, P_0) = 2 \cdot d(A_0', P_0)$. Como a razão entre distâncias ao longo de uma reta é preservada por uma transformação afim e como todas as figuras planas F_0 são levadas pela transformação $T(x, y) = (ax, by)$ em figuras F tais que área (F) /área $(F_0) = ab$, conclui-se que o triângulo equilátero $A_0B_0C_0$, inscrito em Γ, é levado por T no triângulo de

vértice A, inscrito em E, com a maior área possível, que a base BC desse triângulo é paralela ao diâmetro conjugado de AA', que essa base BC corta AA' num ponto P tal que $d(A, P) = 2 \cdot d(A', P)$ e que a área desse triângulo ABC, sendo ab vezes a área do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1, não depende da escolha do vértice A.

37.10 Os triângulos inscritos na elipse E, de equação $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$, cujos baricentros coincidem com o centro $(0,0)$ de E são imagens de triângulos com baricentro $(0,0)$, inscritos na circunferência Γ de equação $x^2 + y^2 = 1$, pela transformação $T(x, y) = (ax, by)$. Ora, um triângulo inscrito em Γ cujo baricentro é $(0,0)$ tem suas medianas passando pelo centro de Γ, logo tais medianas são alturas e o triângulo é equilátero. Assim os triângulos inscritos em E com baricentro $(0,0)$ têm todos área igual a ab vezes a área do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1.

37.11 A área do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1 é igual a $3\sqrt{3}/4$. Portanto a imagem desse triângulo pela transformação afim $T(x, y) = (ax, by)$ tem área $3\sqrt{3}ab/4$. Esta é a maior área de um triângulo inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

37.12 Se as diagonais de um paralelogramo inscrito numa elipse são diâmetros conjugados dessa elipse então o paralelogramo é imagem, por uma transformação afim T, de um quadrilátero, inscrito na circunferência, cujas diagonais são perpendiculares. Tal quadrilátero é um quadrado, portanto possui a maior área dentre todos os quadriláteros inscritos na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ Como área $T(F) = |\det T| \cdot$ área (F) para toda figura plana F, segue-se que o paralelogramo cujas diagonais são diâmetros conjugados tem área máxima entre todos os quadriláteros inscritos na elipse. Se a equação da elipse E é $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ então a transformação T é dada por $T(x,y) = (ax, by)$ e $\det T = ab$. A elipse E é imagem por T da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, na qual um quadrado inscrito tem área 2. Logo a área do paralelogramo que é imagem desse quadrado por T é igual a $2ab$.

37.13 Se a elipse E não é uma circunferência, seja AB seu eixo maior. Como não há outros dois pontos em E a uma distância igual a $d(A, B)$, para toda isometria T que leve a elipse em si mesma, deve-se ter $T(A) = A$, $T(B) = B$ ou então $T(A) = B$ e $T(B) = A$. Se T é uma reflexão então no primeiro caso o eixo de reflexão é AB e, no segundo caso, o eixo de reflexão é a mediatriz de AB, logo é o eixo menor da elipse. Estes são portanto os únicos eixos de simetria de uma elipse que não é uma circunferência.

37.14 Faça os planos Π e Π_1 se intersectarem numa reta que contenha os lados AB e A_1B_1 dos triângulos dados, de tal modo que os pontos A e A_1 coincidam e B esteja entre A_1 e B_1 (supondo, evidentemente, que $d(A, B) < d(A_1, B_1)$. Tome sobre o lado A_1C_1 um ponto C' tal que os segmentos BC' e B_1C_1 sejam paralelos, logo os triângulos ABC' e $A_1B_1C_1$ são semelhantes. Seja r a reta CC'. A projeção de Π sobre Π_1 paralelamente à reta r leva o triângulo ABC em ABC', que é semelhante a $A_1B_1C_1$.

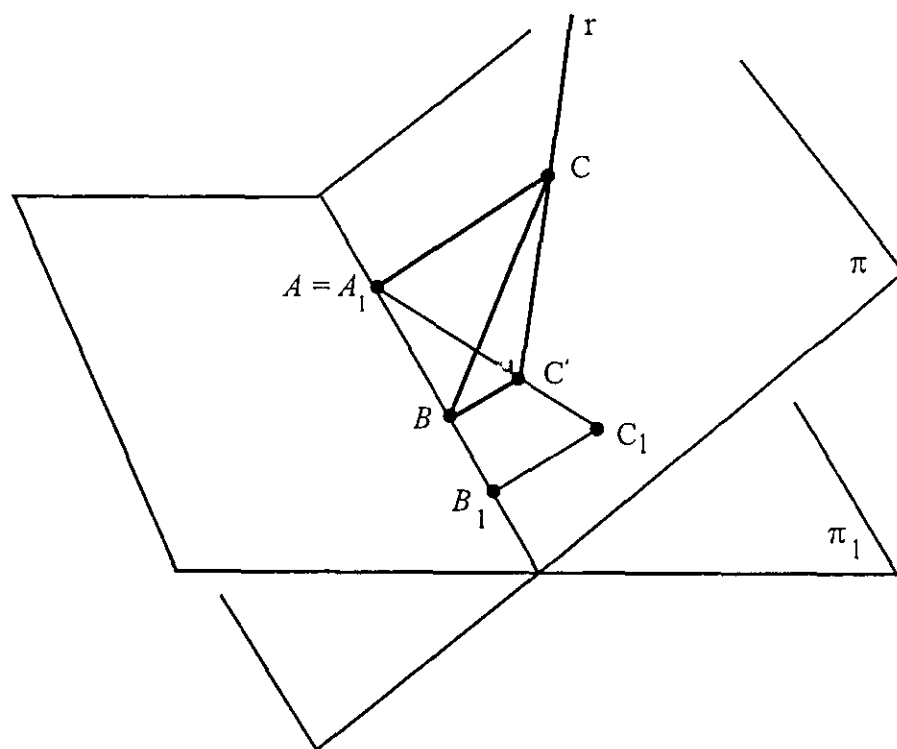



Figura 37.14

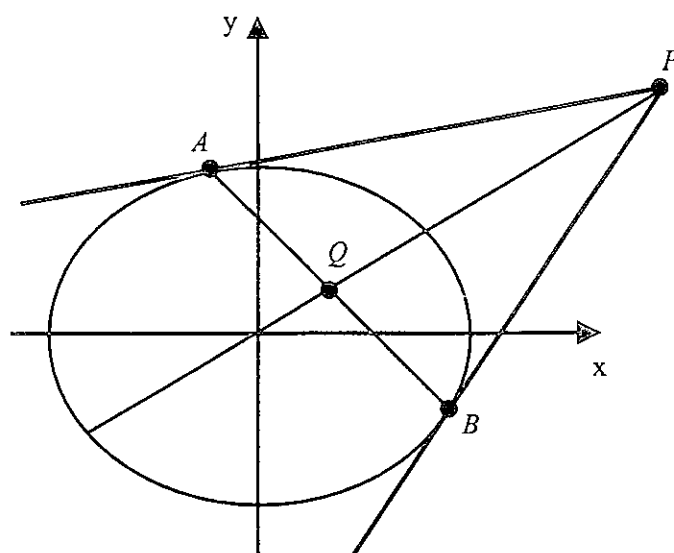
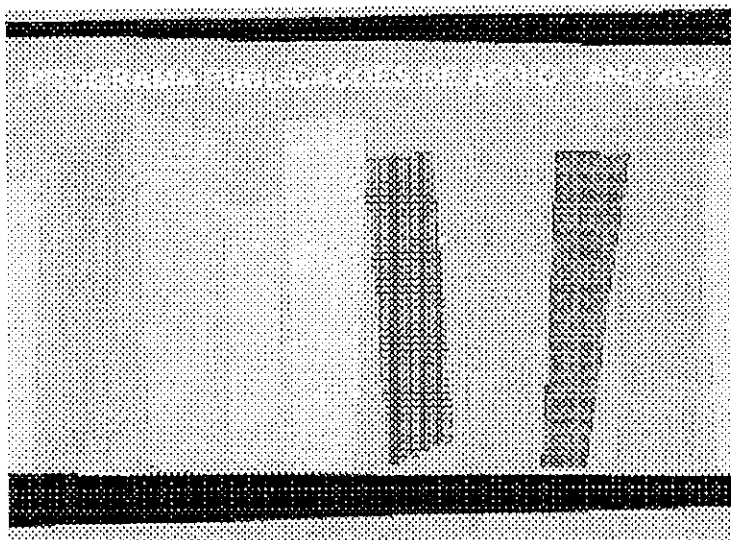



Figura 37.15

37.15 Seja C uma circunferência de centro O. Se as tangentes que tocam C nos pontos A_0 e B_0 se encontram no ponto P_0 então os pontos A_0 e B_0 são simétricos em relação à reta OP_0. [Com efeito, a reflexão de eixo OP_0 leva em si mesma as circunferências C e C', onde C' tem diâmetro OP_0. Como $C \cap C' = \{A_0, B_0\}$, a imagem de A_0 por essa reflexão só pode ser B_0.] Logo OP_0 é a mediatriz do segmento A_0B_0. Noutras palavras: a reta que liga P_0 ao ponto médio de A_0B_0 passa por O. Considerando a transformação afim que leva a circunferência C na elipse dada, segue-se imediatamente a solução do exercício.

38.1 Se F não fosse afim, sua inversa F^{-1} também não seria (já que F é a inversa de F^{-1}). Neste caso, existiriam três pontos colineares $A_1B_1C_1$ cujas imagens $A = F^{-1}(A_1)$, $B = F^{-1}(B_1)$ e $C = F^{-1}(C_1)$ seriam não-colineares, já que toda colineação é afim. Como $A_1 = F(A)$, $B_1 = F(B)$ e $C_1 = F(C)$, a transformação F transformaria pontos não colineares em pontos colineares, uma contradição.

38.2 Deixamos este exercício para que o leitor resolva por si só. A estas alturas, ele já deve estar apto para isto e também cansado de ler soluções escritas pela mesma pessoa.

O objetivo do Programa é estimular a publicação e a distribuição de livros-textos, obras de referência e outras que contribuam diretamente para a formação inicial e continuada de professores.

Veja como funciona

O Programa será desenvolvido com o apoio do Comitê de Produtores da Informação Educacional (Comped) na re-produção dos materiais aprovados, segundo as seguintes condições:

1) Terão preferência as editoras universitárias de Instituições de Ensino Superior mantidas pelo setor público.
2) Não serão aceitas obras que se caracterizem como estudo de caso, dissertação ou tese sem as devidas modificações para adequá-las ao público-alvo do Programa.
3) É permitida a co-edição das obras aprovadas com outras editoras.
4) As obras a serem encaminhadas ao Programa devem ser previamente selecionadas e aprovadas pelos respectivos Conselhos Editoriais.
5) Só serão aceitas reedições de obras comprovadamente esgotadas há, no mínimo, dois anos.
6) Não há limite de envio de propostas por editora ou por processo de seleção. Também não há limite para o número de obras que podem ser contratadas para reprodução.
7) Cada volume de uma mesma obra é considerado como uma proposta independente.
8) Para cada reprodução apoiada, deverá ser enviada ao INEP uma cota de 1.000 exemplares, para distribuição às bibliotecas universitárias, às unidades acadêmicas, às editoras participantes do Programa e, por solicitação, a outras instituições interessadas, até esgotar a referida cota.
9) Para cada obra a ser reproduzida nos termos do Programa será elaborado instrumento contratual específico, indicando todas as condições a serem seguidas pelas partes. A Editora Universitária responsabilizar-se-á por todos os custos de edição da obra apoiada, além da prestação de contas e outras exigências que se fizerem necessárias.

Maiores informações e calendário consultar:
http://www.inep.gov.br/comped/default.htm

E-mail: comped@inep.gov.br

Endereço:
Secretaria Executiva do Comped
Centro de Informações e Biblioteca em Educação – CIBEC
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, Térreo
Brasília - DF
CEP 70047 – 900
Telefones: (61) 410-9052 ou 323-5510

Este livro é parte do material que foi utilizado nos Cursos de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, um programa organizado pelo IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, com patrocínio da VITAE – Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social, realizado no princípio dos anos 90.

O tema principal aqui abordado é o uso de coordenadas como método para estudar Geometria Plana. Isso é feito em três etapas.

A primeira parte consta de uma apresentação breve e simplificada da Geometria Analítica Plana. Na segunda parte, são introduzidos os vetores. Na terceira, a aplicação de coordenadas e vetores para estudar as transformações geométricas mais simples, como as isometrias, as semelhanças e as transformações afins do plano. Por último, são apresentadas as soluções dos exercícios propostos, antes editados separadamente no livro "Problemas e Soluções – Geometria Analítica, Vetores e Transformações Geométricas", do mesmo autor e com o mesmo colaborador.

A exposição é feita de modo bastante elementar, tendo em vista o público a que se destina: alunos e professores do ensino médio, e alunos de licenciatura em Matemática.

Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina 110, s.108
22460-320 Rio de Janeiro RJ
[21] 2529-5076, -5073
[21] 259-4143 (fax)
http://www.sbm.org
secretaria@sbm.org.br